5852-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

55. BAND, 1. HEFT
MIT 2 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1951)

PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1951

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

55. Band/1. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Arens, R. Operations Induced in Function Classes 1

Knödel, W. Über Zerfällungen 20

Müller, H. R. Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel 28

Böheim, H. Krümmungskreise und Evoluten reeller Kegelschnitte bei Cayley-Klein'scher Metrik 43

Hohenberg, F. Logarithmische Spiralen im komplexen Gebiet 54

Knödel, W. Sätze über Primzahlen 62

Wunderlich, W. Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken . 76

Gröbner, W. Über den idealtheoretischen Beweis des Satzes von Bézout 82

Buchbesprechungen 87

Operations Induced in Function Classes.

By

Richard Arens, Los Angeles (California).

(Received April 12, 1950.)

1. Introduction.

The first part of this paper consists of providing a natural setting for a certain rather formal process (see the next paragraph) and in an investigation of the results. The second part consists of a more detailed examination of the special case of the normed linear algebra $C(X, R)$ of continuous function on a compact Hausdorff space.

Suppose A is a linear algebra and A^* is the class of linear (with values in the field of coefficients) functions on A, and $A^{**} = (A^*)^*$. Then xy $(x, y \varepsilon A)$ is defined, of course. Now define fx $(x \varepsilon A, f \varepsilon A^*)$ thus: $fx(y) = f(xy)$. Then define ξf $(\xi \varepsilon A^{**}, f \varepsilon A^*)$ thus: $\xi f(x) = \xi(fx)$. Finally define $\eta \xi$ $(\eta, \xi \varepsilon A^{**})$ thus: $\eta\xi(f) = \eta(\xi f)$. It is not hard to see that combined with the linear structure of A^{**} this operation $\eta\xi$ makes A^{**} into a linear algebra containing A as a subalgebra. Now the process outlined above does not lean heavily on the assumption that A is an algebra. In section 2 we present axioms for categories in which such a process can be carried out ("phyla"). We also prove several theorems which can be briefly but vaguely summed up as saying that A^{**} is a natural extension of A.

In Section 3 we consider problems encountered in making a "phylon" out of a class of topological spaces, including (1) the case of normed linear spaces, in which case the problems can be solved and (2) the class of all topological spaces in which case they cannot.

One property not generally passed from A to A^{**} is commutativity. We regret that in spite of the consideration of many examples of commutative normed linear algebras, no non-trivial criterion insuring the

commutivity of A^{**} has suggested itself[1]. We have however, presented a detailed examination of the space $C(X, R)$. $C(X, R)^{**}$ does turn out to be commutative. In fact, $C(X, R)^{**}$ can be represented as a space $C(Y, R)$ where Y has a continuous mapping on X, related in a natural way to the natural algebra-isomorphism of $C(X, R)$ with a closed subalgebra of $C(Y, R)$.

2. Phyla, or genetically closed systems.

A *phylon* is a class (A) of sets with a class (F) of functions satisfying the axioms 2.01 to 2.09 set down below. Before proceeding to these let us explain the notation

$$f : A \longrightarrow B.$$

This means that A, $B \varepsilon (A)$ and $f \varepsilon (F)$, and that $f(a)$ is defined in B for every a in A. To avoid introducing names for functions whose definition is either obvious (as in 2.04 below), or immaterial (as for example the first function in 2.08) or perfectly clear in consequence of functions already defined or presupposed (as the second function in 2.08) we shall often merely write $A \longrightarrow B$.

2.01 *For f in (F) there are A, B in (A) such that $f : A \longrightarrow B$.*

2.02 *For A in (A) the identity function belongs to (F): $A \longrightarrow A$.*

2.03 *If A, $B \varepsilon (A)$ then $A \times B \varepsilon (A)$.*

2.04 If A, B, C (A) *then*

$$(A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C),$$

and

$$A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C.$$

$((a, b), c)$ and $(a, (b, c))$ are paired in each of these functions, of course.

2.05. *If $f : A \longrightarrow B$ and $g : B \longrightarrow C$ then $g \circ f \varepsilon (F)$.*

The function $g \circ f = h$ has the values $h(a) = g(f(a))$.

For A and B fixed elements of (A), we usw B^A for the class of all f with $f : A \to B$. The next 3 axioms are characteristic of phyla, and 2.06 is the basis for the name. Although axiomatics are not our primary concern here, we remark that 2.06 does not follow from the others, and neither does 2.07.

2.06. *If A, $B \varepsilon (A)$ then $B^A \varepsilon (A)$.*

---

[1] (ADDED IN PROOF) Since writing this we have found that complete on continuity of the product in A will insure that commutativity in A is transmitted to A^{**}.

2.07. *If* $A \times B \longrightarrow C$ *then* $A \longrightarrow C^B$, *and conversely.*

If the first function here be called m, and the second n, then the relation between them is as follows:

$$m(a, b) = n(a)(b) \qquad (a \varepsilon A, b \varepsilon B).$$

2.08. *If* $A \longrightarrow B$ *then* $C^B \longrightarrow C^A$ *where* $C \varepsilon (A)$.

If the first function be called f and the second f', then they are related thus:

$$f'(g)(a) = g(f(a)) \qquad (g \varepsilon C^B, a \varepsilon A).$$

2.09. $A \times B \longrightarrow B \times A$.

Our first proposition is that the correspondence established in 2.07 is actually a member of (F). In this and all the succeeding propositions of this section, we suppose that we are dealing with a fixed phylon.

2.1 *Theorem*: $C^{A \times B} \longrightarrow (C^B)^A$, $(C^B)^A \longrightarrow C^{A \times B}$.

Proof: By 2.03 and 2.02, $A \times B \longrightarrow A \times B$. By 2.08, $C^{A \times B} \longrightarrow C^{A \times B}$. By 2.07, $C^{A \times B} \times (A \times B) \longrightarrow C$. By 2.04 and 2.05, $(C^{A \times B} \times A) \times \times B \longrightarrow C$. By the first half of 2.07, $(C^{A \times B} \times A) \longrightarrow C^B$, and again $C^{A \times B} \longrightarrow (C^B)^A$. For the other way around, we run through the assertions without citing the axioms: $(C^B)^A \longrightarrow (C^B)^A$, $(C^B)^A \times A \longrightarrow C^B$, $((C^B)^A \times A) \times B \longrightarrow C$, $(C^B)^A \times (A \times B) \longrightarrow C$, $(C^B)^A \longrightarrow C^{A \times B}$. This proves 2.1.

The next proposition is that a certain well-known function, which we shall always call j, belongs to (F). It is interesting to observe that 2.09 is used in the proof.

2.2 *Theorem*: *The function* $j : A \longrightarrow B^{(B^A)}$ *where* $j(a)(f) = f(a)$ *for* a *in* A *and* f *in* B^A *belongs to* (F).

Proof: $B^A \longrightarrow B^A$, $B^A \times A \longrightarrow B$, $A \times B^A \longrightarrow B$, and so $A \longrightarrow B^{(B^A)}$, *q . e . d.*

If j is *one-to-one*, we shall say that A is *B-separated in the phylon.*

The next proposition is the one which the subsequent discussion is based and could perhaps be made into an axiom replacing 2.06, 20.7, and 2.08. In any case, the latter are not used explicitly beyond the proofs of 2.1, 2.2 and 2.3.

2.3 *Theorem*: *If* $f : A \times B \longrightarrow C$ *and* $K \varepsilon (A)$ *then* $k : K^C \times A \longrightarrow K^B$ *where*

2.31. $$k(h, a)(b) = h(f(a, b))$$

for all h *in* K^C, a *in* A *and* b *in* B.

Proof: From $A \times B \longrightarrow C$ we have $K^C \longrightarrow K^{A \times B}$, $K^C \longrightarrow (K^B)^A$,

$K^C \times A \longrightarrow K^B$. Examination of the functions involved shows that k has the form stated.

It is a help to observe that the letters h, a, and b appear in the *same order* on both sides of 2.31.

The following is the main theorem of this section.

2.4 *Theorem*: *Let K be a fixed element of (A) and write B^* for K^B for every B in (A). Let A, $A_1, \ldots, A_n$ belong to (A) and suppose*

$$m : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow A$$

Then there is a mapping μ_n in (F) for which

2.41. $\mu_n : A_1^{**} \times \ldots \times A_n^{**} \to A^{**}$

and such that for $a_1, \ldots, a_n$ in $A_1, \ldots, A_n$ resp.,

$$\mu_n (j(a_1), \ldots, j(a_n)) = j(m(a_1, \ldots, a_n))$$

(for j see 2.2). Moreover, the function μ_n is so defined in terms of m that if one has

$\alpha : A \to B$, $\alpha_1 : A_1 \to B_1, \ldots, \alpha_n : A_n \to B_n$ *with* $m' : B_1 \times \ldots \times B_n \to B$ *such that*

$$m'(\alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_n(a_n)) = \alpha(m(a_1, \ldots, a_n)),$$

then for $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in $A_1^{**}, \ldots, A_n^{**}$ resp., one has 2.42

$$\mu'_n (\bar{\alpha}_1(\xi_1), \ldots, \bar{\alpha}_n(\xi_n)) = \bar{\alpha}(\mu_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))$$

where the $\bar{\alpha}$ are obtained from the α by a two-fold application of axiom 2.08.

Proof: We construct a sequence of functions $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, by repeated application of 2.3. First,

$$\mu_0 : A^* \times A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \to A_n^*$$

where

$$\mu_0 (f, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})(a_n) = f(m(a_1, \ldots, a_n))$$

where a_i is, throughout this proof, an arbitrary element of A_i, and f is an arbitrary element of A^*. We proceed, using ξ_i to denote an arbitrary element of A_i^{**}, to define

$$\mu_1 : A_n^{**} \times A^* \times A_1 \times \ldots \times A_{n-2} \to A^*_{n-1}$$

where

$$\mu_1 (\xi_n, f, a_1, \ldots, a_{n-2})(a_{n-1}) = \xi_n (\mu_0 (f, a_1, \ldots, a_{n-1}));$$

$$\vdots$$

$$\mu_{n-k+1} : A_k^{**} \times \ldots \times A_n^{**} \times A^* \times A_1 \times \ldots \times A_{k-2} \to A^*_{k-1}$$

where $0 \leqq k < n$ and

2.43. $\mu_{n-k+1}(\xi_k, \ldots, \xi_n, f, a_1, \ldots, a_{k-0})(a_{k-1}) =$
$\xi_k(\mu_{n-k}(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n, f, a_1, \ldots, a_{k-1}))$

.

.

.

$$u_n : A_1^{**} \times \ldots \times A_n^{**} \to A^{**}$$

where

$$\mu_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)(f) = \xi_1(\mu_{n-1}(\xi_2, \ldots, \xi_n, f)).$$

It is easy to see that each μ is obtained from the preceding one in accordance with 2.3. Now let $\xi_k = j(a_k)$. Then 2.43 reads

$$\begin{aligned}&\mu_{n-k+1}(\xi_k, \ldots, \xi_n, f, a_1, \ldots, a_{k-2})(a_{k-1})\\ &= \mu_{n-k}(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n, f, a_1, \ldots, a_{k-1})(a_k)\\ &= \xi_{k+1}(\mu_{n-k-1}(\xi_{k+2}, \ldots, \xi_n, f, a_1, \ldots, a_k).\end{aligned}$$

If in addition, $\xi_i = j(a_i)$ for all i greater than k one finally obtains $f(m(a_1, \ldots, a_n))$; and this result holds even for $k = n$, as 2.4 asserts. To obtain the covariance property 2.42 of the process of obtaining μ_n out of m, one observes first that

2.44. $\alpha^*_n(\mu'_0(g, \alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_{n-1}(a_{n-1})) = \mu_0(\alpha^*(g), a_1, \ldots, a_{n-1}),$

where the symbols not already defined are g, an arbitrary element of B^* and α^*, the function $\alpha^* : B^* \to A^*$ which is obtained through 2.08 from $\alpha : A \to B$. Then $\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_n$ are defined similarly. Next, we propose that for $2 \leqq k \leqq n$,

2.44_{n-k+1}.
$$\begin{aligned}&\alpha^*_{k-1}(\mu'_{n-k+1}(\bar{\alpha}_k(\xi_k), \ldots, \bar{\alpha}_n(\xi_n), g, \alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_{n-2}(a_{n-2})))\\ &= \mu_{n-k+1}(\xi_k, \ldots, \xi_n, \alpha^*(g), a_1, \ldots, a_{k-2})\end{aligned}$$

when $k < n$ this is reduced to 2.44_{n-k} and when $k = n$ it is reduced to 2.44 by the following method. Evaluate each side (which is clearly an element of A^*_{k-1}) at a_{k-1}. Appeal to 2.43 with the right side, and to the analogue for the B, B_i of 2.43 with the left side. Using formulae like $\alpha^*(g)(a) = g(\alpha(a))$ and $\bar{\alpha}(\xi)(g) = \xi(\alpha^*(g))$ one obtains two expressions which are equal by 2.44_{n-k} or 2.44. Thus 2.44_{n-k+1} is established for $k \geqq 2$. Now 2.42 does not fit into this scheme because both sides belong to B^{**}, but if each side is evaluated at g, and the preceding devices employed, two expressions are obtained which are equal by virtue of 2.44_{n-1}.

This establishes 2.4.

Let us call μ_n the *natural extension* of m.

The last theorem is expressible in more familiar terms when $n = 2$ and $A_1 = A_2 = A$. Then 2.4 can be put in the following form.

2.5 *Theorem. Let A and K belong to (A) (see 2.01—2.09) and let there be a binary operation m (written as a product) in A. Then this operation can be extended to a product μ_2 in A^{**} in such a way that the natural mapping $j : A \to A^{**}$ is a homomorphism. Moreover, if B in (A) also has a binary operation and if $\alpha : A \to B$ is a homomorphism, then the natural extension of α, $\bar{\alpha} : A^{**} \to B^{**}$ is also a homomorphism.*

In order to shed more light on the nature of the product thus defined in A^{**} we desire to relate it to that of substitution of functions mapping $A^* \to A^*$. From $A \times A \to A$ we obtain $A^* \times A \to A^*$, $A^{**} \times A^* \to A^*$. The last of these shows the possibility of mapping A^{**} into $(A^*)^{A^*}$. In the latter class there is an obvious binary operation, that of substitution. It is of course associative. It turns out to be related to the product in A^{**}. Before going into this we wish to formulate the mapping involved, as well as another mapping.

2.6 *Theorem: Let K be a fixed element of (A), and suppose there is a multiplication defined in A,*

$$m : A \times A \to A.$$

Then there are functions

$$\mu : A^{**} \to (A^*)^{A^*}$$

and

$$\nu : A \to (A^*)^{A^*}$$

which send A^{**} and A into families of operators in A^*, where $(a, \times \varepsilon A, f \varepsilon A^*, \xi \varepsilon A^{**})$

2.61 $$\mu(\xi)(f) = \mu_1(\xi, f),$$

where

2.62 $$\mu_1(\xi, f)(x) = \xi(\mu_0(f, x)), \mu_1 : A^{**} \times A^* \to A^*;$$

and

2.63 $$\mu_0(f, x)(a) = f(m(x, a)), \mu_0 : A^* \times A \to A^*;$$

and

2.64 $$\nu(a)(f) = f_a$$

where

$$f_a(x) = f(m(x, a)).$$

Finally,

2.65. $$\nu = \mu_0 j.$$

Proof: Equations 2.62 and 2.63 occurred in the proof of 2.4; we repeat them here merely to have 2.6 self-contained. Applying 2.07 to 2.62 one obtains

$$\mu : A^{**} \to (A^*)^{A^*}, \ \mu(\xi)(f) = \mu_1(\xi, f),$$

which is to be the definition of μ. The definition of ν is given by 2.64. There remains only the last assertion, that $\nu(a) = u(j(a))$ for a in A. It is proved thus: $\mu(j(a))(f) = \mu_1(j(a), f)$. On evaluation at x, the right side yields, by 2.62 and 2.63, $j(a)(\mu_0(f, x)) = \mu_0(f, x)(a) = f(m(x, a)) = f_a(x)$. Before leaving this proof we should consider the following possibility. From 2.63 we can obtain $A \times A^* \to A^*$ and thus $\pi : A \to (A^*)^{A^*}$. Here $\pi(a)(f) = \mu_0(f, a)$ whence $\pi(a)(f)(x) = \mu_0(f, a)(x) = f(m(a, x))$. This is evidently not the same as ν, the distinction being like that between right and left regular representations. We chose ν and not π because ν turns out to be the composite of μ and j, and μ, rather than some other function, appears to be related to the product in A^{**}.

We wish to show that μ is a homomorphism when A is associative. We prefer to dispose first of the necessity of associativity. It is clear that if μ is a homomorphism so is ν. If in addition, ν is $1-1$, then A is necessarily associative (the same is true of μ and A^{**}). However, a somewhat better result can be proved with almost no effort. We leave the proof of the following result to the reader.

2.7 Theorem: If ν is a homomorphism and if A^* is separating (i. e., j is $1-1$) then A is associative (i. e., m is associative).

Conversely, if A is associative then ν is a homomorphism. This is included in the next theorem, by 2.65.

2.71 *Theorem*: *If A is associative then μ (and hence also ν) is a homomorphism. If μ is a homomorphism then A^{**} is associative* (*and thus also A if j is* $1-1$).

Proof: We use the notation of 2.4 and 2.6. The thing to be proved is $\mu(\mu_2(\eta, \xi)) = \mu(\eta) \circ \mu(\xi)$ for η, ξ in A^{**}. Evaluate each side at f in A^*, and call the results 1 and 2 resp. Then $1 = \mu_1(\mu_2(\eta, \xi), f)$, $2 = \mu(\eta)(\mu_1(\xi, f)) = \mu_1(\eta, \mu_1(\xi, f))$. Evaluate each of these for x in A, calling the results 3 and 4 resp. Then $3 = \mu_2(\eta, \xi)(\mu_0(f, x)) = \eta(\mu_1(\xi, \mu_0(f, x))$, $4 = \eta(\mu_0(\mu_1(\xi, f), x)$. It will therefore suffice if we prove $\mu_1(\xi, \mu_0(f, x)) = \mu_0(\mu_1(\xi, f), x)$. These are elements of A^*, so evaluate each side at y in A, calling the results 5 and 6 resp. Then $5 = \xi(\mu_0(\mu_0(f, x), y)$, $6 = \mu_1(\xi, f)(m(x, y)) = \xi(\mu_0(f, m(x, y))$. It will now suffice to prove μ_0

$(\mu_0(f, x), y) = \mu_0(f, m(x, y))$. Evaluate each of these for z in A, calling the results 7 and 8, resp. Then $7 = \mu_0(f, x)(m(y, z)) = f(m(x, m(y, x))$, $8 = f(m(m(x, y), z))$. These are equal since A is associative, so that μ is proved to be a homomorphism. The question of associativity of μ_2 is whether or not

$$\mu_2(\zeta, \mu_2(\eta, \xi)) = \mu_2(\mu_2(\zeta, \eta), \xi)\ (\zeta, \eta, \xi \varepsilon A^{**}).$$

To test the equality, evaluate at any f in A^*, calling the results 9 and 10. Then $9 = \zeta(\mu_1(\mu_2(\eta, \xi), f)$, $10 = \mu_2(\zeta, \eta)(\mu_1(\xi, f)) = \zeta(\mu_1(\eta, \mu_1(\xi, f))$. Thus 9 and 10 are the values of ζ at the points called 1 and 2 which are clearly equal when μ is a homomorphism. This completes the proof of 2.71.

Presupposing as before a fixed class K of (A), a subset D of A is called a *determining set* if $f(x) = g(x)$ for every x in D for f, g in A^* implies $f = g$. A set D in A^* is called a *seperating set* if for $x \neq y$ in A there is an f in D such that $f(x) \neq g(x)$. In these terms there is a simple criterion of whether μ or ν is $1 - 1$.

2.72 *Theorem*: *The function ν is $1 - 1$ if and only if the class of all $\mu_0(f, x)$ $(f \varepsilon A^*, x \varepsilon A)$ forms a seperating set, and μ is $1 - 1$ if and only if it forms a determining set.*

The proof follows directly from the definitions, and is omitted. The hypotheses are both satisfied if A has a left unit and A^* is a separating set. On the other hand, trivial examples exist in which μ or even ν is not $1 - 1$.

We turn now to a topic which appears unrelated to the preceding, but is merely a slight generalization of the proof that A^{**} is associative if A is. We must define the notion of representation. There are various ways in which this definition could be made in a manner conforming to general usage. The following is most convenient.

Let A be an element of (A) with a multiplication

$$m : A \times A \to A.$$

Let $U \varepsilon (A)$. Then a *representation* of (A, m) in U is a function

$$r : A \times U \to U$$

such that for a, b in A and u in U

2.73 $$r(m(a, b), u) = r(a, r(b, u)).$$

This is equivalent to saying that there is a homomorphism

$$\sigma : A \to U^U,\ \sigma(a)(u) = r(a, u)$$

Evidently m is a representation of (A, m) in A if and only if A is associative (the *regular* representation). When A is associative, μ_0 and μ_1 are representations of A and A^{**} in A^*. The proof of this is, according to the remark about σ above, given by 2.71.

A natural question to ask, if one has a representation r of (A, m) in U, whether one can find a representation r' of A^{**} in U such that $r'(j(a), u) = r(a, u)$. For example, this can be done by taking μ_1 in case of the representation μ_0 when A is associative. It can sometimes not be done for the regular representation. But the following theorem yields a condition under which such an "extension" is possible.

2.8 *Theorem*: *Let r be a representation of (A, m) in U $(U \varepsilon (A))$. Then there exists a representation ϱ_2 of A^{**} in U^{**} such that $\varrho_2(j(a), j(u)) = j(r(a, u))$ for a in A and u in U.*

Proof: From $r : A \times U \to U$ obtain $\varrho_2 : A^{**} \times U^{**} \to U^{**}$ in accordance with 2.4. The condition involving the j is satisfied by a clause of 2.4. Hence, the only thing that remains to be proved in 2.73 with symbols adapted to the present case, *viz*:

$$\varrho_2(\mu_2(\zeta, \eta), \xi) = \varrho_2(\zeta, \varrho_2(\eta, \xi))$$

where $\zeta, \eta \varepsilon A^{**}$ and $\xi \varepsilon U^{**}$. Both sides are elements of U^{**}, so to test the equality, evaluate both sides for a general element f of U^*, obtaining

$$\mu_2(\zeta, \eta)(\varrho_1(\xi, f)) = \zeta(\mu_1(\eta, \varrho_1(\xi, f)))$$

and

$$\zeta(\varrho_1(\varrho_2(\eta, \xi), f))$$

respectively. It will therefore suffice to prove that

$$1' = \varrho_1(\varrho_2(\eta, \xi), f)$$

and

$$2' = u_1(\eta, P_2(\xi, f))$$

are equal. Now these terms are formed in exactly the same way as are 1 and 2 of the proof of 2.71, the only difference being that some of the $\mu's$ there are here $\varrho's$. But the verification that $1' = 2'$ can be easily made along the same lines.

Let us say that U is *a K-retract* if there exists a function

$$k : U^{**} \to U$$

such that $k(j(u)) = u$ for each u in U. The 'K' in the name refers us to the set K used in forming U^* *etc.*

2.81 *Corollary*: *Let r be a representation of (A, m) in U $(U \varepsilon (A))$, and let U be a K-retract. Then there exists a representation r' of (A^{**}, μ_2) in U such that $r'(j(a), u) = r(a, u)$ for a in A and u in U.*

Proof: Let $r'(\xi, u) = k(\varrho_2(\xi, j(u)))$.

A representation r of A in U may be called *faithful* if $r(a, u) = r(b, u)$ for all u implies $a = b$. Clearly r is faithful if and only if the related function $A \to U^U$ is $1 - 1$, but since r is not the *same* as this function, the new term is justified. The analogue of 2.72 is the following, in which the symbols have the meaning assigned in the proof of 2.8. The proof is omitted.

2.82 *Theorem*: *The representation r is faithful if and only if the class of all $\varrho(f, a)$ $(f \varepsilon U^*, a \varepsilon A)$ is a separating set in A^*, and ϱ_2 is faithful if and only if the set of all $\varrho_1(\xi, f)$ $(\xi \varepsilon U^{**}, f \varepsilon U^*)$ is a determining set in A^*.*

One can produce examples to show that r is faithful but ϱ_2 is not. In the phylon of normed linear spaces, select U to be *reflexive* (i. e., a K-retract where K is the field of scalars plus the fact that j is "onto"), say Hilbert space. Let $A = U^U$. It is then clear that the operators representing elements of A^{**} are not more than those representing A.

It seems to be difficult to obtain useful conditions which would insure that A^{**} is commutative if A is commutative. We present a theorem showing how to construct many examples in which this is not true.

2.9 *Theorem*: *If A^{**} contains two functions with non-intersecting ranges, then A^{**} is not commutative.*

Proof: Let ξ and η be the elements mentioned. Then for f in A^* and g in A^* we never have $\xi(f) = \eta(g)$. Now consider $\mu_2(\xi, \eta)$. For f in A^*, $\mu_2(\xi, \eta)(f) = \xi(\mu_1(\eta, f))$, which is thus one of the values taken on by ξ. Likewise $\mu_2(\eta, \xi)(f)$ is one of the values taken on by η. Hence these cannot be equal.

The *center* Z of A is the class of elements z with $m(x, z) = m(z, x)$ for every x. We leave to the reader the proof of the following.

2.91 *Theorem*: *Under j the center of A is sent into the center of A^{**}.*

We might call k *simple* if for any A in (A), if f, g belong to K^A then either the range of f includes that of g or vice versa. Our main unsolved problem is this: if A is commutative and K is simple, is A^{**} commutative ?[1]

[1] (ADDED IN PROOF) Examples have now been found, in which commutativity is not transmitted even under these conditions. There exist commutative Banach algebras A in which the induced ring structure in A^{**} is not commutative.

3. Construction of phyla of topological spaces.

Suppose (A) is a class of topological spaces and (F) is a class of continuous functions satisfying 2.01, 2.02, 2.03, 2.04, 2.05, and 2.09. These conditions are often easily satisfied. It is of course assumed that the topology of $A \times B$ is the product topology. The problem that remains is to topologize B^A so that B^A belongs to (A) (cf. 2.06) and so that

3.01 $\quad A \times B \to C$ *implies* $A \to C^B$ *for all* A *in* (A)

and

3.02 $\quad A \to C^B$ *implies* $A \times B \to C$, *for all* A *in* (A)

hold. These are the components of 2.07. A topology for C^B making it a member of (A) such that 3.01 holds is called *proper*, while one making it a member of (A) such that 3.02 holds is called *admissible*. This usage does not agree exactly with that appearing elsewhere because that of the way (A) and (F) enter. Calling a topology t_1 *larger* than another t_2 when every set open in t_2 is also open in t_1 we have the following situation.

3.1 *Lemma*: *Any admissible topology is larger than every proper topology.*

Proof: Taking A to be C^B with an admissible topology, we have the mapping $A \times B \to C$ continuous by 3.02. Letting C^B have a proper topology, and taking the previous A we have $A \to C^B$ by 3.01. This was to be proved.

3.2 *Corollary: A topology satisfying* 3.01 *and* 3.02 *is unique. If it exists it is the smallest admissible topology and the largest proper topology.*

An admissible proper may fail to exist [Fox], when (A) is *the* class of topological spaces and (F) is *the* class of continuous functions. Even a smallest admissible topology may fail to exist [Arens I, p. 483]. It is not known whether a smallest admissible topology is always proper, but a largest proper one may not be admissible, since (it can be easily shown that) there is always a largest proper topology. For the sake of definiteness, we draw an obvious conclusion:

3.3 *Theorem*: *The class of topological spaces with the class of continuous functions as* (F) *does not form a phylon.*

This negative result increases the interest of the following.

3.4 *Theorem*: [*Kuratowski II*]. *The* L^**-spaces of Kuratowski* [*Kuratowski I*, 14] *form a phylon.*

In fact, Kuratowski formulates other natural conditions which his L^*-space C^B satisfies [cf. Kuratowski II, Th. 5], besides those which we have adopted as the axioms for phyla. We selected only such axioms

as would suffice to establish the results of 2. For one thing, a direct sum theory is not possible without new axioms.

Preliminary to seeing if normed linear spaces can be made into a phylon, we want to prove the following proposition.

3.5 *Lemma*: *Let B and C be Banach spaces, and let N be the class of all continuous linear operators of B into C, normed in the following way*:

$$3.51 \qquad \| f \| = \sup_{\| b \| \leqq 1} \| f(b) \|$$

Now if N_1 be the same class made into Banach space such that the mapping

$$3.52 \qquad N_1 \times B \to C \qquad ((f, b) \to f(b))$$

is continuous, then N_1 and N are topologically isomorphic.

Proof: We shall show that under the stated conditions, the identity mapping of N_1 into N is continuous, and the result will follow from the theorem of Banach [Banach, p. 41] (thus the reader can see how the conditions on N_1 could even be relaxed). Let the norm in N_1 be written (f). Let $(f_n) \to 0$. One can surely find b_n in B such that $\| b_n \| = 1$ and $\| f_n(b_n) \| > \frac{1}{2} \| f_n \|$, by 3.51. Let t_n be the positive square root of (f_n). Then $t_n b_n$ approaches 0 and so does f_n/t_n. By 3.52 we have

$$\frac{f_n}{t_n} \cdot (t_n b_n) = f_n(b_n) \to 0.$$

Hence $\| f_n \| \to 0$. Thus the mapping $N_1 \to N$ is continuous at 0 and hence everywhere, and N_1 and N are isomorphic by the argument already presented.

The most important phylon is probably that of normed linear spaces.

3.6 *Theorem*: *Let (A) be the class of normed linear spaces, and let (F) be the class of continuous linear operators. For B, C in (A) define the norm in $B \times C$ (here usually called $B + C$) by*

$$3.61 \qquad \| (b, c) \| = \max (\| b \|, \| c \|)$$

and in C^B define the norm as in 3.51 *.Then (A), (F) form a phylon.*

Proof: Since the right side ("max") of 3.61 is a symmetric associative function, we have 2.03, 2.04, 2.09. 2.01, 2.02, and 2.05 are obvious. 2.06 is obvious from 3.51. Let us prove 2.08. Let $f : A \to B$. Let $f'(g)(a) = g(f(a))$, $g \varepsilon C^B$, $a \varepsilon A$. Then $\| f'(g) \| \leqq \| g \| \, \| f \|$ whence $f'(g) \varepsilon C^A$ and moreover $\| f' \| \leqq \| f \|$ whence f' is bounded, at least. (The fact that $\| f' \| \leqq \| f \|$ can be exploited in another phylon to be considered later). For 2.07 let us take first 3.01, and let $m : A \times B \to C$, and define $n(a)(b) = m(a, b)$. Then

$$|| n(a) || \leqq \sup_{|| b || \leqq 1} || m(a, b) ||$$
$$\leqq \sup_{|| b || \leqq 1} || m || \, || (a, b) || \leqq || m || \max (|| a ||, 1).$$

Hence $n(a) \varepsilon C^B$ and moreover $|| n || \leqq || m ||$ whence at least n is bounded and thus belongs to (F). For 3.02, begin with n and define m. Then

$$|| m || = \sup_{|| (a, b) || \leqq 1} || n(a)(b) || \leqq || n ||$$

Thus $m \varepsilon (F)$. This proves 3.6.

In the phylon defined in 3.6, the conditions $f: A \to B$, $g: B \to A$ with $f \circ g$ and $g \circ f$ equal to the identity does not entail that f and g preserve norm and hence that A and B are abstractly indistinguishable. One could achieve this by letting (F) be the class of all linear operators *of bound not greater than* 1 [cf. Eilenberg and MacLane, p. 470] but then *either* a different definition of C^B would have to be given, *or* it would not be an entire normed linear space, but only the unit ball of one. We elect the latter alternative. We shall call the unit ball (the elements with norm not greater than 1) of a normed linear space an *affine ball*. If now B and C are affine balls and we have a *linear*

$$f: B \to C$$

then the corresponding operator for the corresponding normed linear spaces has norm not exceeding 1.

3.7 *Theorem*: *The affine balls form a phylon.*

The proof is contained in the proof of 3.6. It is worth remarking that while in 3.6 the norm 3.61 could have been replaced by a great many other formulae, it is not so in the case of affine balls. For example, if $|| (a, b) ||^2 = || a ||^2 + || b ||^2$ then $A \times B$ not an affine ball.

Theorem 3.7 is not intended to replace 3.6 by any means. Usually one wants 3.6, but if a mapping happens to have norm not greater than 1, Theorem 3.7 tells us that all mapping constructible from it by means of the theorems of 2 will also have norm not exceeding 1.

For completeness, we add the next proposition.

3.8 *Theorem*: *Using the definitions of* 3.6 *and* 3.7, *the Banach spaces form a phylon and their unit balls, the "complete affine balls" form a phylon.*

These are in an obvious sense subphyla. We shall close by showing that the Hilbert (i. e., unitary) spaces cannot be made into a phylon, at least not if (F) is taken to be all the linear continuous operators involved. Clearly they do not form a subphylon, for. 3.51 does not usually produce a unitary space. But it is *a priori* conceivable that some other way of

defining norm in C^B would make it a Hilbert space. But by 3.5, it would have to be an "equivalent" norm. Passage to "equivalent" norm preserves such topological properties as reflexivity. Except in trivial cases, the Banach space C^B is never reflexive.

A *normed linear algebra* A is a normed linear space in which there is defined a distributive operation of multiplication satisfying

3.81 $$\| ab \| \leqq \| a \| \, \| b \|$$

We will subsequently be interested in the algebras obtained from the following.

3.9 *Theorem: Let A and K be normed linear spaces and let A be a normed linear algebra. Then* (*see* 2.5) *A^{**} is also a normed linear algebra and the mapping of A into A^{**} is an isomorphism. A^{**} is associative if A is.*

We are going to be interested in associative commutative A, and we want to know if A^{**} is commutative. It is almost impossible to have A^{**} commutative when K has dimension greater than 1 (as 2.95 shows) so we shall limit ourselves to the case where K is the real numbers and (A) are real normed linear spaces.

4. The ring of continuous functions.

By way of illustration but mainly as a tool for the investigation of the semi-simple case, we shall consider the Banach (= complete normed linear) algebra of real valued continuous functions on a (bi) compact Hausdorff space T. We will denote this algebra by $C(T, R)$, and in this section, merely by A. The K of theorem 3.9 shall be the field R of real numbers. We shall constantly use the generalized Riesz theorem:

4.01 [*cf. Kakutani, Th.* 10]. *To every f in A^* there corresponds a unique complete regular Borel set function $[f]$ defined on T such that*

4.02 $$\| f \| = \textit{total variation of } [f],$$

and

4.03 $$f(x) = \int_T x(t)\,[f]\,(dt), \qquad (x \textit{ in } A),$$

and conversely.

Now, as indicated in [Kakutani und Kodaira] this theorem may be modified so that not necessarily all Borel set are measurable, but at least all Baire sets are measurable, but in such a way that this *Baire* measure is complete and *strongly regular*:

4.04. A measure m is *strongly regular* if for every measurable set E there is an open set W containing E with $m(W - E)$ less than any

preassigned positive number, where W is itself the union of a sequence of measurable compact sets.

For abbreviation, we will write integrals such as in 4.03 as $\int_T x\,[f]$. For the moment let us say that we intend to explain the functions μ_0, μ_1, and μ_2 (refer to 2.6) in this special case. In the end it will turn out that μ_2 is commutative.

Let us write f_a for $\mu_0\,(f, a)$, and let us write ξf for $\mu_1\,(\xi, f)$. And finally, we will often abbreviate the latter down to f'.

4.1 *Lemma*: *For any Baire set* E

$$[f_a]\,(E) = \int_E a\,[f]$$

We omit the obvious proof. An immediate result is

4.12 *Corollary*: *All* $[f]$ *measurable sets are* $[f_a]$ *measurable.*

4.2 *Lemma*: *Let* f *be a nonnegative element of* A^* (i. e., $f(x) \geqq 0$ *for* $x \geqq 0$ *in* A). *Then* $[\xi f]$ *is absolutely continuous with respect to* $[f]$.

Proof: Let $[f]\,(E) = 0$. We must prove $[f']\,(E) = 0$. We shall show that for each positive e there is an open set W including E on which the total variation of $[f']$ is less than e. This total variation is given by

$$|\,[f']\,|\,(W) = \sup \int x\,[f']$$

extended over all x in A whose values on W lie in $[-1, 1]$, and vanish outside W. Also,

4.21 $$|\,[f']\,|\,(W) = \sup f'(x) = \sup \xi\,(f_x).$$

Select W so that $[f]\,(W) < e/\,\|\xi\|$. Then for such x as previously mentioned,

$$\begin{aligned} \|f_x\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} |f(yx)| \\ &= \sup \left| \int_T x\,y\,[f] \right| \\ &\leqq [f]\,(W). \end{aligned}$$

Combining with 4.21 we arrive at $[f']\,(W) < e$.

4.22 *Corollary*: *All* $[f]$ *measurable sets are* $[\xi f]$ *measurable.*

4.3 *Theorem*: *Let* ξ *belong to* A^{**}, *and let* f *be non-negative. Then there exists a real valued Baire function* h *such that for every Baire set* E

4.31 $$[\xi f]\,(E) = \int_E h\,[f]$$

and

4.32 $$\sup |h(t)| \leqq \|\xi\|.$$

Proof: 4.31 is a consequence of a suitable generalization of the Radon-Nykodym theorem [Saks, p. 36]. For 4.32 we must use 4.04, as follows. Suppose $\| \xi \| = 1$, but that $h(t) > 1$ on a set E of positive $[f]$ measure. Then by 4.31, $[f'](E) > [f](E)$. We can now obtain an open W as described in 4.04 so that $[f](W) < [f'](W) + e$ where e is a suitable positive number. We can now obtain an x in A, $0 \leqq x \leqq k_w$ where k_w is the characteristic function of W such that $\int x\,[f']$ is sufficiently close to $[f'](W)$ so that $f(x) < f'(x)$. Now $f(x) = f_x(1) = \| f_x \|$. Moreover, $| f'(x) | = | \xi(f_x) | \leqq \| f_x \|$. This contradiction shows that $h(t) \leqq 1$ almost everywhere. Thus 4.32 can be proved.

Note: This function h cannot always be obtained by the formula

4.33 $$h(t) = \xi(m_t)$$

where m_t is the functional corresponding to the measure concentrated at t, $mt(\{t\}) = 1$. Indeed, if the measure of all finite sets is zero then 4.33. yields 0 identically. The trouble is that h does not depend only on ξ (as 4.33 would have one believe) but also on f.

4.34 *Corollary: h is unique except for values on a set of total $[f]$ variation zero.*

Any member of this class we denote by ξ/f, and the whole class we denote by (ξ/f).

Our next problem is to see how greatly this class changes when f changes and ξ is held fixed.

4.4 *Theorem. Let f and g belong to A^*. Let f be non-negative and let $[g]$ be Lipschitzean with respect to $[f]$. Then ξ/f differs from ξ/g only on a set on which the variation $[g]$ is zero.*

To facilitate the proof, we shall define f_p for any f in A^* and bounded Baire function p

4.41 $$f_p(x) = \int_T p\,x\,[f].$$

It follows at once that $f_{(px)} = (f_p)_x$ for x in A.

Hence

$$\xi(f_p(x) = \xi((f_p)_x = \xi(f_{px})$$

Denote the first term by u.

Define

$$v = (\xi f)_p = \int p\,x\,[f']$$

Then

$$| v - u | \leqq | v - \xi f(y) | + | \xi(f_y) - u | \qquad (y \varepsilon A)$$

4.42 $$\leqq \int | p\,x - y |\,|[f']| + \| \xi \|\,\| f_{px-y} \|$$

Now

$$\| f_{px-y} \| = \int | px - y | \, [f]$$

But A is dense in the L_1-space determined by $[f]$. Hence we can choose y so that the right of 4.42 is arbitrarily small. Thus $u = v$ and we have a preliminary result: $(\xi f)_p = \xi (f_p)$.

Now suppose $g = f_p$, as the hypothesis implies.

Let $h = \xi/f$ and let $h_1 = \xi/g$. Then for any Baire set E

$$[(\xi f)_p - (E) = \int_E p \, [f'] = \int_E p \, h \, [f]$$

and

$$[\xi (f_p)] (E) = \int_E h_1 \, [f_p] = \int_E h_1 \, p \, [f].$$

Thus $h(t) = h_1(t)$ except on a set on which the total variation of $[g]$ is zero. This proves 4.4.

Let us consider the product in A^{**}. Abbreviate $\mu_2 (\xi, \eta)$ by $\xi \, \eta$.

4.5 *Theorem*: *Let ξ, η belong to A^{**}. Let f be a non-negative element of A^*. Then*

$$\xi/f \, . \, \eta/f \, \varepsilon \, (\eta \, \xi/f).$$

Proof: Let $\xi f = f'$ as before, and let $\eta f' = f''$. Then by definition, for any Baire set E

$$[f''] (E) = \int_E \eta/f' \, [f']$$

Now $[f']$ is Lipschitzean with respect to $[f]$, by 4.3. Using 4.4, we may write

$$\begin{aligned} [f''] (E) &= \int_E \eta/f \, [f'] \\ &= \int_E \eta/f \, . \, \xi/f \, [f]. \end{aligned}$$

This finishes the proof of 4.5.

4.51 *Corollary*: *A^{**} is commutative.*

This is as far as we promised to go. But the formula of 4.5 is a convenient means for explaining the structure of A^{**}. We intend to prove that $A^{**} = C(U, R)$ for some compact Hausdorff space U. To discover such a relation one must know that certain norm relations hold. This brings us to the next proposition.

Let f be a non-negative element of A^*. For each equivalence class (ξ/f) of bounded $[f]$-measurable functions defined as in 4.34 let $\| \xi/f \|$ denote the *essential* bound of any and all members of (ξ/f).

4.6 *Lemma*: *For ξ in A^{**}*

$$\| \xi \| = \sup_{\substack{\| f \| = 1 \\ f \geqq 0}} \| \xi / f \|$$

Proof: The inequality $' \geqq '$ was already asserted in 4.32. On the other hand

$$\| \xi \| = \sup_{\| g \| = 1} | \xi (g) | = \sup | \int \xi / g \, [g] | \leqq \sup | \int \xi / g \, | \, [g] \, ||,$$

the bars around a set function denoting the total variation. Here the measure is the same as $[f]$ where f is the absolute value, $g_+ - g_-$, of g, by definition. Now g is Lipschitzean with respect to f so that $\xi / g = \xi / f$ except on a set of $[f]$-measure 0, whence

$$\| \xi \| \leqq \sup_{\substack{\| f \| = 1 \\ f \geqq 0}} | \int \xi / f \, [f] | \leqq \sup \| \xi / f \|.$$

These results allow the following statement about A^{**}. In conformity with usual terminology [Lefschetz], we shall call a Banach algebra B an *inverse limit of M-spaces* if

4.61 *There is a directed set $\mathfrak{M}$ of measures in a set T, each making T of measure 1 where $m_2 \geqq m_1$ means m_1 is Lipschitzean with respect to m_2;*

4.62 *To each ξ in B and each m in $\mathfrak{M}$ there corresponds an element of ξ_m of the M-space [Banach] in such a way that the correspondence is an algebraic homomorphism;*

4.63. *If $m_2 \geqq m_1$ then ξ_{m_2} and ξ_{m_1} differ only on a set of m_1 measure* 0;

and ($\| \quad \|_m$ denoting essential bound in the measure m).

4.64 $$\| \xi \| = lim_m \| \xi_m \|_m.$$

4.7 *Theorem: The Banach algebra A^{**} is an inverse limit of M-spaces on the set T where the class $\mathfrak{M}$ is the class of Baire measures giving T measure* 1. *It contains A is a closed subalgebra.*

The proof of 4.7 is easily assembled out of the results we have proved. Regarding 4.64, we may even assert that the limit $\| \xi \|$ is actually attained for some m, as the proof of 4.6 shows.

We can obtain another representation theorem for A^{**}.

4.8 *Theorem*: *There exists a compact Hausdorff space $T^\sim$ such that A^{**} is algebraically and isometrically isomorphic with the algebra $C(T^\sim, R)$ of continuous real valued functions on $T^\sim$. There exists a continuous mapping*

$$\varphi : T^\sim \to T$$

such that if the natural mapping sends x in A into ξ in A^{**} then $\xi(\tau) = \chi(\varphi(\tau))$ for every τ in $T^{\sim}$.

Proof: The representation by $C(T^{\sim}, R)$ is obtained by verifying the conditions of a certain theorem characterizing such spaces [Arens II]. This verification, based on 4.7, can be left to the reader.

The space $T^{\sim}$ is the space of maximal ideals of A^{**}. Now each maximal ideal gives a homomorphism h of A^{**} into R. Then $h \circ j$ defines a homomorphism of A, which in turn defines a point of T. Thus φ is obtained. Its continuity is trivial.

Except for the statement about φ, which ties up the ring structure of A with that of A^{**}, 4.8 is a theorem [Kakutani Theorem 15].

Bibliography.

Arens, R. (I), *A topology for spaces of transformations*, Ann. of Math. 41, 480—495 (1946).

Arens, R. (II), *Representation of Banach*-algebras*, Duke, Math. J. 14, 269—282 (1947).

Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932.

Eilenberg, S. and *S. MacLane, General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. 58, 231—294 (1945).

Fox, R. H. Topologies for function spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 51, 429—432 (1945).

Kakutani, S., Representation of abstract (M) — *spaces*, Ann. of Math. 42, 994—1024 (1941).

Kakutani, S. und *K. Kodaira, Über das Haarsche Maß in der lokal bikompakten Gruppe*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 444—450 (1944).

Kuratowski, C. (I) *Topologie I*, Warsaw 1933.

Kuratowski, C. (II) *Sur la topologie des espaces fonctionnels*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 314—322 (1948).

Lefschetz, S., Algebraic Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 27, New York, 1942.

Saks, S., Theory of the Integral.

Über Zerfällungen.

Von

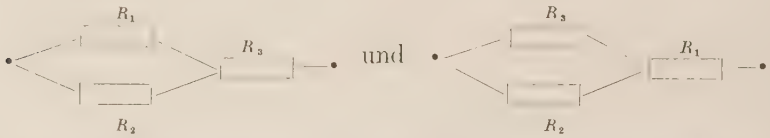
Walter Knödel, Wien.

(Eingelangt am 12. Mai 1950.)

Einleitung.

Herr *K. Wanka*, Wien, regte an, folgendes Problem zu untersuchen: *Gegeben sind verschiedene Widerstände. Wie groß ist die Anzahl der Schaltungen, die sich aus ihnen herstellen lassen?*

Es liegt nahe, diese Frage in zwei Schritten in Angriff zu nehmen. Zuerst wäre die Anzahl der möglichen Schaltbilder festzustellen, ohne Rücksicht auf Permutationen der Widerstände zu nehmen (so gehören z. B. die Schaltungen



zum selben Schaltbild, werden aber im allgemeinen verschiedene Endwiderstände ergeben). Dann wären Formeln für die volle Anzahl der Schaltungen abzuleiten, in denen das gleiche Schaltbild mit Rücksicht auf Permutationen der Widerstände mehrmals auftreten kann.

Die Probleme werden auf zahlentheoretische Sätze zurückgeführt. Es war mir allerdings nicht möglich, diese Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen, ich mußte mich auf einen möglichst umfassenden Spezialfall beschränken. Dazu mache ich über die Beschaffenheit der Schaltbilder folgende einschränkende Voraussetzung (1): Das einzelne Schaltbild soll sich in mindestens zwei Gruppen hintereinander- (oder parallel-) geschalteter Widerstände zerlegen lassen; jede dieser Gruppen sei weiter zerlegbar in mindestens zwei parallel- (oder hintereinander-) geschaltete Untergruppen usw., bis nur mehr Einzelwiderstände vorliegen.

Diese Voraussetzung über die Schaltbilder bedeutet tatsächlich eine Einschränkung. Zwar noch nicht für $s = 1, 2, 3, 4$. Aber bei $s = 5$ verliert man bereits jenes Schaltbild unter den 25 möglichen, das der Wheatstoneschen Brücke entspricht; und mit wachsendem s steigt die Zahl der unberücksichtigten Schaltbilder rasch an.

Unter „Anzahlen" werden im folgenden stets die durch Voraussetzung (1) eingeschränkten Anzahlen verstanden.

I. Die Anzahl der Schaltbilder von s-Widerständen.

§ 1. Zuerst soll die fragliche Anzahl auf ein zahlentheoretisches Problem zurückgeführt werden. Dazu suche man irgendeine Zerfällung von s in die Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_i$ auf und nenne sie eine „Anordnung erster Stufe". Nun zerfälle man die Zahlen e unabhängig voneinander weiter, und zwar jedes e in mindestens zwei Summanden. Man erhält die Zahlen $f_{11}, \ldots f_{1j}; f_{i1} \ldots f_{ir}$. Waren einige e gleich groß, dann treten Anordnungen auf, die durch Permutationen der gleichen e unter sich ineinander übergehen. Jede solche Gruppe von Anordnungen werde als eine einzige Anordnung gezählt und man hat die „Anordnungen zweiter Stufe" erhalten. Das Verfahren ergibt fortgesetzt die „Anordnungen dritter Stufe", wobei man wieder auf gleiche f innerhalb einer Gruppe zu achten hat. Dieser Prozeß bricht längstens bei den Anordnungen s-ter Stufe ab, denn dann sind alle Zahlen bis zu Einsen zerfällt. Sei Γ_s^k die Anzahl der Anordnungen k-ter Stufe der Zahl s und γ_s^k die Anzahl der Anordnungen, in denen s schon in mindestens 2 Summanden zerfällt wurde. Dann gilt *Satz 1*:

Die Anzahl der Schaltbilder ist gleich Γ_s^s.

Dazu haben wir zu zeigen, daß sich die Schaltbilder den Anordnungen s-ter Stufe umkehrbar eindeutig zuordnen lassen.

1. Jedes Schaltbild läßt sich in Gruppen von Widerständen zerlegen, die hintereinander geschaltet sind; sie entsprechen den Anordnungen erster Stufe. Jede Gruppe wird in parallelgeschaltete Untergruppen geteilt, denen wir die Anordnungen zweiter Stufe zuordnen; und so fort. Genau so überlegt man sich

2. daß jeder Anordnung ein Schaltbild entspricht, wenn man verlangt, daß von der zweiten Stufe an jede Zahl in mindestens 2 Summanden zerfällt wird.

§ 2. Hilfssätze über die γ_s^i und Γ_s^i.

Hilfssatz 1: $\gamma_i^{s-2} = \gamma_i^{s-1} = \gamma_i^s = \ldots$

Beweis: In jeder Stufe muß von der größten vorhandenen Zahl mindestens 1 abgespalten werden; nach $s-2$-Schritten ist 2 die größte auftretende Zahl und die Zerfällung von 2 in mindestens 2 Summanden ist eindeutig.

Hilfssatz 2: $\Gamma_s^u = \gamma_s^{u-1} + \gamma_s^u$.

Beweis: Die Anordnungen 1. Stufe von s zerfallen in 2 Gruppen. Die erste Gruppe enthält s, die zweite alle übrigen Zerfällungen. Um zu den Anordnungen n-ter Stufe zu gelangen, sind die 1. Stufe $n-1$ mal weiterzuzerfällen. Die erste Gruppe liefert den Beitrag γ_s^{u-1}, die zweite Gruppe γ_s^u.

Setzt man in Hilfssatz 2 $n = s$ und beachtet Hilfssatz 1, dann bekommt man Hilfssatz 3: $\Gamma_s^s = 2\,\gamma_s^s$.

§ 3. Rekursionsformeln.

Die Fragestellung lautet: Wie lassen sich die γ_i^u in den γ_i^{u-1} ausdrücken? Nach Hilfssatz 2 sind damit auch die Γ_i^u bekannt.

Hilfssatz 4: Sei $s = g\,.\,k$ und die Anordnung 1. Stufe

$$s = k + k + k \ldots + k$$

vorgelegt. Dann liefert sie zu den Anordnungen n-ter Stufe den Beitrag

$$\binom{\gamma_k^{u-1} - 1 + g}{g}.$$

Beweis: Wir denken uns die Anordnungen $n-1$-ter Stufe von k in irgendeine Reihenfolge gebracht. Dann darf nach der Feststellung auf Seite 2 oben nur das erste k alle Anordnungen unabhängig durchlaufen; dem zweiten k sind nur mehr jene Anordnungen gestattet, die höchstens dieselbe Nummer wie die zugehörige Anordnung von k_1 tragen; allgemein sind dem i-ten k nur mehr jene Anordnungen gestattet, die höchstens dieselbe Nummer wie die zugehörige Anordnung von k_{i-1} tragen. Kurze Überlegung zeigt, daß die Zahl der so gewonnenen Anordnungen gleich ist der γ_k^{u-1}-ten figurierten Zahl der g-ten Ordnung:

$$\frac{\gamma\,(\gamma+1)\,(\gamma+2),\ \ldots,\ (\gamma+g-1).}{1\,.\,2\,\ldots\,g}$$

Das ist genau Hilfssatz 4.

Hilfssatz 5: Sei $s = \alpha + b$; a gestatte α und b β davon unabhängige Anordnungen. Dann gestattet s $\alpha\,.\,\beta$ Anordnungen.

Beweis trivial.

Aus den Hilfssätzen 4 und 5 folgt *Satz 2*:

$$\gamma_s^u = \sum_{k=1}^{\gamma_1^s} \prod_{i=1}^{s-1} \binom{\gamma_i^{u+1} - 1 + x_i}{x_i},$$

wobei die Summe über sämtliche Lösungen der Gleichung

$$s = \sum_{i=1}^{s-1} i \,.\, x_i^k$$

in ganzen Zahlen läuft. (Die k sind obere Indizes, nicht Exponenten).

Die Schlußreihe der γ_s^s läßt sich sogar ohne Umweg über die γ_s^i erreichen. Man liest aus Satz 2 und Hilfssatz 1 nämlich *Satz 2a* ab:

$$\gamma_s^s = \sum_{k=1}^{\gamma_s^1} \prod_{i=1}^{s-1} \binom{\gamma_i^s - 1 - x_i}{x_i}.$$

Damit ist γ_s^s auf γ_i^s, $i < s$ zurückgeführt.

§ 4. Erzeugende Funktionen.

Noch eine Modifikation von Satz 2 ist möglich:

Satz 2b.

$$\Gamma_s^u = \sum_{k=1}^{\gamma_s^1} \prod_{i=1}^{s} \binom{\gamma_i^{u-1} - 1 + x_i}{x_i},$$

wobei die Summe über sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$s = \sum_{i=1}^{s} i \,.\, x_i^k$$

läuft.

Beweis: Man hat zu den in Satz 2 gezählten Anordnungen die hinzuzuzählen, die zu

$$s = 1 \,.\, 0 + 2 \,.\, 0 + \ldots + (s-1) \,.\, 0 + s \,.\, 1$$

gehören; das sind aber γ_s^{u-1}. Mit Hilfssatz 2 folgt die Behauptung.

$\sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_i^u \, x^i$ heißt die erzeugende Funktion der Γ_i^u. Nach *Euler* erhält man die erzeugende Funktion der Γ_i^1, wenn man die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{ij} \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots n, \ldots$$

ineinandermultipliziert. Man überlegt sich an Hand von Satz 2b leicht, daß man die erzeugende Funktion der Γ_i^u durch ineinandermultiplizieren der Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma_i^{u-1} - 1 + j}{j} x^{ij} \qquad i = 2, \ldots, u, \ldots$$

bekommt. Also

$$1 + x + \sum_{i=2}^{\infty} \Gamma_i^u x^i = \prod_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma_i^{u-1} - 1 + j}{j} x^{ij} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} x^j. \qquad (1)$$

Wenn man von der Identität

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j}{j} z^j = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{a+1}$$

Gebrauch macht, kann man dieses Ergebnis auf *Satz 3* umformen:

$$1 + x + \sum_{i=2}^{\infty} \Gamma_i^u x^i = \frac{1}{1-x} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^i}\right)^{\gamma_i^{u-1}}.$$

Auch hier kann man für γ_i^i aus Hilfssatz 3 ein Sonderresultat erhalten:
Satz 3a:

$$1 + x + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i^i x^i = \frac{1}{1-x} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^i}\right)^{\gamma_i^i}.$$

Umgekehrt sind die γ_i^i durch die Forderung, Satz 3a zu einer Identität zu machen, eindeutig definiert.

Aus Formel (1) erhält man mit erträglicher Rechenarbeit die Werte der γ_i^j und Γ_i^j.

II. Die Anzahl der Schaltungen von s-Widerständen.

§ 1. Definition und Hilfssätze.

Wie schon erwähnt, können die Widerstände innerhalb der Schaltbilder permutiert werden. Ich bezeichne jene Schaltungen mit A_i^j, die aus den Γ_i^j Schaltbildern 1. Art hervorgehen und jene Schaltungen mit α_i^j, die aus den γ_i^j Schaltbildern 2. Art hervorgehen.

Genau wie in Abschnitt I. beweist man 3 Hilfssätze.

Hilfssatz I: $\alpha_i^{s-2} = \alpha_i^{s-1} - \alpha_i^s - \ldots$

Hilfssatz II: $A_s^u = \alpha_s^{u-1} + \alpha_s^u$

Hilfssatz III: $A_s^s = 2\,\alpha_s^s$.

§ 2. Rekursionsformeln.

Nun lautet Hilfssatz IV:

Sei $s = g \cdot k$ und die Anordnung 1. Stufe

$$s = k + k + k \ldots + k$$

vorgelegt. Dann liefert sie zu den Schaltungen n-ter Stufe den Beitrag

$$\left(\frac{\alpha_k^{u-1}}{k!}\right)^g \cdot \frac{s!}{g!}$$

Beweis: k erlaubt α_k^{u-1} Schaltungen $n-1$-ter Stufe. Die k-Gruppen sind voneinander unabhängig, da in keiner zwei gleiche Widerstände vorkommen. Das liefert den Faktor $(\alpha_k^{u-1})^g$. Nun können die Widerstände noch aus einer Gruppe in die andere wechseln. Wir üben dazu sämtliche $s!$ Permutationen aus — daher dieser Faktor — und streichen die unerlaubten wieder aus. Zunächst müssen wir die entfernen, die jede der g-Gruppen in sich transformieren, das liefert den Faktor $(k!)^{-g}$. Zuletzt aber ist die Reihenfolge belanglos, in der die g-Gruppen angeschrieben werden und das bedingt den Faktor $g!^{-1}$.

Genau so beweist man den Hilfssatz V:

Sei $s = a + b$; a gestatte α und b β davon unabhängige Schaltungen. Dann gestattet $s \dfrac{\alpha\beta}{a!\,b!}\, s!$ Anordnungen.

Aus den Hilfssätzen IV und V folgt *Satz II*:

$$\alpha_s^u = s! \sum_{k=1}^{\gamma_s^1} \prod_{i=1}^{s-1} \left(\frac{\alpha_i^{u-1}}{i!}\right)^{x_i} \cdot \frac{1}{x_i!},$$

wobei die Summation über sämtliche Lösungen der Gleichung

$$s = \sum_{l=1}^{s-1} i \,.\, x_i^k$$

in ganzen Zahlen läuft.

Die Analoga zu Satz 2a und Satz 2b lauten hier:

Satz IIa:

$$\alpha_s^s = s! \sum_{k=1}^{\gamma_s^1} \prod_{i=1}^{s-1} \left(\frac{\alpha_i^s}{i!}\right)^{x_i} \cdot \frac{1}{x_i!}.$$

Satz IIb:

$$A_s^u = s! \sum_{k=1}^{\Gamma_s^1} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\alpha_i^{s-1}}{i!}\right)^{x_i} \cdot \frac{1}{x_i!},$$

wobei die Summation über sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$s = \sum_{i=1}^{s} i \,.\, x_i^k$$

läuft.

§ 4. Erzeugende Funktionen.

Wenn man die Funktion

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_i^{u-1}}{i!} \right)^j \cdot \frac{x^{ij}}{j!}$$

bildet, dann stellt man mit Hilfe von Satz IIb fest, daß der Koeffizient von x^s in der Entwicklung nach Potenzen von x bis auf den Faktor $s!$ mit A_s^n übereinstimmt. Man gewinnt daher den Ansatz

$$1 + x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{A_i^u x^i}{i!} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_i^{u-1}}{i!} \right)^j \cdot \frac{x^{ij}}{j!} \tag{I}$$

Nennen wir für den Augenblick

$$\left(\frac{a_i^{u-1} \cdot x_i}{i!} \right) = z_i$$

dann erhalten wir

$$1 + x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{A_i^u x_i}{i!} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_i^j}{j!} = \prod_{i=1}^{\infty} e^{z_i}$$

und weiter den *Satz III*:

$$1 + x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{A_i^u x_i}{i!} = e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^{u-1} x_i}{i!}}.$$

Höchst bemerkenswert wird hier *Satz IIIa*:

$$1 + x + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i^i x^i}{i!} = e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^i x^i}{i!}}.$$

Schreiben wir ihn so

$$1 - x + 2 \left\{ x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i^i x_i}{i!} \right\} = e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^i x^i}{i!}}$$

und nennen wir

$$x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i^i x^i}{i!} = u, \tag{II}$$

dann kommt

$$1 - x + 2u = e^u.$$

Entwickeln wir u in seine Taylorreihe nach Potenzen von x und vergleichen die Koeffizienten mit (II). Das liefert den *Hauptsatz* der vorliegenden Arbeit:

Erklärt man eine Funktion $u = u(x)$ durch die Gleichung

$$x = 1 + 2u - e^u,$$

dann ist die Anzahl der Schaltungen von n-Widerständen gleich der doppelt genommenen n-ten Ableitung von u nach x der Stelle $x = 0$.

In Zeichen:

$$A_n^n = 2 \left(\frac{d^n u}{dx^n} \right)_{x=0}$$

Für die numerische Berechnung erweist sich (I) geeigneter.

Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 17. Mai 1950.)

L. Euler stellte 1776 die Drehungen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes um einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ mittels Quaternionen dar. Ein Punkt $\mathfrak{x}$ mit dem Ortsvektor $\vec{\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$ wird in den Punkt $\mathfrak{x}'$ mit dem Ortsvektor $\vec{\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}'} = \mathfrak{x}'$ gedreht, wenn

$$\mathfrak{x}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{P} \tag{1}$$

gilt und $\mathfrak{P} = p_0 + \mathfrak{e}_1 p_1 + \mathfrak{e}_2 p_2 + \mathfrak{e}_3 p_3$ eine genormte Quaternion mit

$$\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{2}$$

ist. Hiebei sind die p_i *Eulers* (homogene) Drehzeiger. $\overline{\mathfrak{P}}$ ist die zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Quaternion. Es genügt, die Drehungen der Einheitskugel zu betrachten; dann gilt für die Skalarprodukte der Vektoren $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}') = 1$.

Die Drehungen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes um einen festen Punkt und somit die Drehungen der Einheitskugel um ihren Mittelpunkt bilden eine dreigliedrige Gruppe, deren Parameterraum der dreidimensionale elliptische Raum ist, worauf zuerst *C. Stéphanos*[1] hingewiesen hatte. Hiezu ordnen wir der Quaternion $\pm\,\mathfrak{P}$ einen gleichfalls mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten Punkt eines dreidimensionalen projektiven Raumes zu, dessen homogene Punktkoordinaten die p_i sind. Durch $\cos\vartheta = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}) = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{Q}} + \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}\} = \Sigma\, p_i\, q_i$ wird der Abstand ϑ zweier Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ erklärt und eine elliptische Maßbestimmung (mit der Krümmung $+\,1$) eingeführt. Den Punkten des absoluten Gebildes $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) = 0$ dieser Maßbestimmung entsprechen singuläre Drehungen.

Im folgenden soll die Bewegungsgeometrie auf der Kugel unter Gegenüberstellung der geometrischen Eigenschaften des „Bildes" im elliptischen Parameterraum entwickelt werden.

---

[1] *C. Stéphanos*, Math. Ann. **22** (1883) 299—367, 589—592.

Zwangsläufige Drehvorgänge.

Geben wir die Quaternion $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(t)$ als Funktion eines reellen Parameters t (Zeit) vor, so wird ein „zwangsläufiger Drehvorgang" D_{I} um den Ursprung $\mathfrak{o}$ festgelegt. Wir denken uns die Kugelfläche doppelt überdeckt: Die „Gangkugel" K vollführe auf der „Rastkugel" K' den Drehvorgang D_{I}. Hängt ein Punkt $\mathfrak{x}$ von K nicht von t ab, so heißt er auf K befestigt. — Vorerst nehmen wir $\mathfrak{x}$ auf K beweglich an. Durch Ableitung nach t erhalten wir aus (1) den *Vektor* $\mathfrak{v}'$ *der absoluten Geschwindigkeit* von $\mathfrak{x}$ gegen K'.

$$\mathfrak{v}' = \frac{d\,\mathfrak{x}'}{d\,t} = \dot{\mathfrak{x}}' = \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{P} + \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{P} = \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{P}$$

Aus (2) folgt $\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} + \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P} = 0$. Wird der Vektor

$$2\,\dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P} = -2\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d} \tag{3}$$

gesetzt, so ergibt sich für den *Vektor* $\mathfrak{v}_f$ *der Führungsgeschwindigkeit*

$$\mathfrak{v}_f = \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'\,\mathfrak{d}\} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{x}' \tag{4}$$

Der Vektor $\dot{\mathfrak{x}}$ stellt die *Relativgeschwindigkeit* von $\mathfrak{x}$ gegen K in der Ausgangslage von K dar, während $\mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{P}$ der Vektor der Relativgeschwindigkeit von $\mathfrak{x}$ gegen K nach der Drehung $\mathfrak{P}$ ist. Es gilt somit $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}_f + \mathfrak{v}$.

Wir suchen nun zum Zeitpunkt t den augenblicklichen *Drehpol*, d. h. jenen Punkt der Einheitskugel, dessen Führungsgeschwindigkeit verschwindet. Wir bezeichnen ihn in der Ausgangslage von K mit $\mathfrak{p}$ und in K' mit $\mathfrak{p}'$. Wegen (4) und $(\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}') = 1$ finden wir

$$\mathfrak{p}' = \frac{\mathfrak{d}}{w} = -\frac{2\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}}}{w} = \frac{2\,\dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P}}{w},\quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{p}'\,\overline{\mathfrak{P}} \tag{5}$$

Hiebei gilt für die *Winkelgeschwindigkeit* w die Beziehung

$$w^2 = 4\,(\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}},\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}}) = 4\,\dot{\mathfrak{P}}\,\dot{\overline{\mathfrak{P}}} = 4\,(\dot{p}_0^{\,2} + \dot{p}_1^{\,2} + \dot{p}_2^{\,2} + \dot{p}_3^{\,2}).$$

Man erhält den Gegenpunkt von $\mathfrak{p}'$ als Momentanpol, wenn man das Vorzeichen von w ändert. $\mathfrak{d}$ ist der *Drehvektor* zum Zeitpunkt t. Für den Vektor der Führungsgeschwindigkeit gilt somit $\mathfrak{v}_f = \mathfrak{p}' \times \mathfrak{x}' \,.\, w$. In der Folge sehen wir $\mathfrak{x}$ als festen Punkt von K an ($\dot{\mathfrak{x}} = 0$) und finden dann in der Führungsgeschwindigkeit die absolute Geschwindigkeit: $\mathfrak{v}_f = \mathfrak{v}'$.

Dem zwangsläufigen Drehvorgang D_{I} entspricht im Parameterraum eine Bildkurve, die vom Punkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(t)$ dort beschrieben wird. — —

Die geometrischen Eigenschaften dieser Kurve, ihre Invarianten gegenüber der Bewegungsgruppe des elliptischen Raumes kennzeichnen nun unseren eingliedrigen Drehvorgang D_I auf der Kugel. Es zeigt sich, daß die Krümmungseigenschaften der Bahnkurven allein von der Krümmung der Bildkurve im Parameterraum abhängen.

Erklärung der *Gleichwertigkeit* der sphärischen Kinematik: Üben wir auf die Ausgangsstellung der Systeme K, K' Drehungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ aus und sehen wir die gedrehten Lagen als gleichwertig an, so stellt sich der Bewegungsvorgang $\mathfrak{P}$ in der Gestalt $\mathfrak{P}^* = \overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{A}'$ dar; die Kurve im Parameterraum erfährt hiebei eine elliptische Bewegung, ist also gegenüber dieser sechsgliedrigen Gruppe der elliptischen Bewegungen gleichwertig.

Wir führen ein den Kurvenpunkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ begleitendes *Polartetraeder* $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ derart ein, daß die Kante $G_1 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\}$ in die Kurventangente, $G_2 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_2\}$ in die Hauptnormale und $G_3 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ in die Binormale der Bildkurve fällt. Sind $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_i'$ die Richtungsvektoren der Kanten G_i, so gilt folgendes System von Ableitungsgleichungen als Gegenstück zu den *Frenet*schen Formeln der Euklidischen Kurventheorie[2]:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{P}}_0 &= \quad * \quad + \mathfrak{P}_1 \dot{s} \quad * \quad * \\ \dot{\mathfrak{P}}_1 &= -\mathfrak{P}_0 \dot{s} \quad * \quad + \mathfrak{P}_2 \dot{g} \quad * \\ \dot{\mathfrak{P}}_2 &= \quad * \quad - \mathfrak{P}_1 \dot{g} \quad * \quad + \mathfrak{P}_3 \dot{h} \\ \dot{\mathfrak{P}}_3 &= \quad * \quad * \quad - \mathfrak{P}_2 \dot{h} \quad * \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{r}}_1 &= \quad * \quad + \mathfrak{r}_2 \dot{g} \quad * \\ \dot{\mathfrak{r}}_2 &= -\mathfrak{r}_1 \dot{g} \quad * \quad + \mathfrak{r}_3 \dot{u} \\ \dot{\mathfrak{r}}_3 &= \quad * \quad - \mathfrak{r}_2 \dot{u} \quad * \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{r}}_1' &= \quad * \quad + \mathfrak{r}_2' \dot{g} \quad * \\ \dot{\mathfrak{r}}_2' &= -\mathfrak{r}_1' \dot{g} \quad * \quad + \mathfrak{r}_3' \dot{u}' \\ \dot{\mathfrak{r}}_3' &= \quad * \quad - \mathfrak{r}_2' \dot{u}' \quad * \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hiebei ist $\dot{u} = \dot{h} + \dot{s}$ und $\dot{u}' = \dot{h} - \dot{s}$. Es bedeutet $\dot{s}\,dt$ das Bogenelement der Kurve $\mathfrak{P}(t)$, $\dot{g} : \dot{s} = \varkappa$ ihre Krümmung und $\dot{h} : \dot{s} = \tau$ ihre Windung. Die Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1'$ der Kurventangente legen auf der Einheitskugel ein längentreu aufeinander bezogenes Kurvenpaar mit dem Bogenelement $\dot{g}\,dt$ fest. Die geodätischen Krümmungen dieser sphärischen Kurven sind $c = \dot{u} : \dot{g} = (\dot{h} + \dot{s}) : \dot{g}$, bzw. $c' = \dot{u}' : \dot{g} = (\dot{h} - \dot{s}) : \dot{g}$. Die zugehörigen Integralinvarianten bedeuten $s = \int \dot{s}\,dt$ die Bogenlänge, $g = \int \dot{g}\,dt$ die Gesamtkrümmung und $h = \int \dot{h}\,dt$ die Gesamtwindung der Kurve $\mathfrak{P}(t)$. Andererseits ist g die Bogenlänge der

[2] Vgl. etwa *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamburger Math. Einzelschr. 34. Heft (1942) § 11.

Kurven $\mathfrak{r}_1(t)$ und $\mathfrak{r}_1'(t)$ mit den geodätischen Gesamtkrümmungen $u = h + s$, bzw. $u' = h - s$. Wegen $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{P}_1 \overline{\mathfrak{P}}_0 = -\mathfrak{P}_0 \overline{\mathfrak{P}}_1$, $\mathfrak{r}_1' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{P}_1 = -\overline{\mathfrak{P}}_1 \mathfrak{P}_0$, sowie (5) und (6) erhalten wir $\mathfrak{p}' = \pm \mathfrak{r}_1'$, $w = \mp 2\dot{s}$. Wir entscheiden uns etwa für jene Orientierung, die dem oberen Vorzeichen jeweils zukommt:

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}_1', \; w = -2\dot{s} \tag{8}$$

Die zweite Formel in (8) besagt im wesentlichen die Übereinstimmung des infinitesimalen Drehwinkels auf der Einheitskugel zum Zeitpunkt t mit dem Bogenelement der Bildkurve im Parameterraum. Bei unserer Vorzeichenwahl weist der „rechte" Richtungsvektor $\mathfrak{r}_1'$ der Kurventangente G_1 nach dem augenblicklichen Drehpol: $\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}_1'$. Der „linke" Richtungsvektor $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{p}$ gibt jenen Punkt von K, der durch die Drehung $\mathfrak{P}$ in den Drehpol $\mathfrak{p}'$ übergeht. Aus (7) entnimmt man nun leicht, daß unser Drehvorgang durch Abrollen der in K befestigten Gangpolbahn $\mathfrak{p}(t)$ nach der jeweils erfolgten Drehung $\mathfrak{P}$ auf der in K' festen Rastpolbahn $\mathfrak{p}'(t)$ entsteht.

Dieser Gegenüberstellung von Drehpolen auf der Kugel und Tangenten an die Bildkurve im Parameterraum liegt folgender Sachverhalt zugrunde: Fassen wir die Geraden G des elliptischen Raumes als Raumelemente auf, so stellt diese von *G. Fubini*, *J. Hjelmslev* und *E. Study* um 1900 betrachtete Abbildung auf gerichtete Punktepaare $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ der beiden Richtungskugeln eine *kinematische Abbildung* dar, bei der den Punkten $\mathfrak{P}$ des elliptischen Raumes, aufgefaßt als Träger von Strahlbündeln, die Drehungen von der linken zur rechten Richtungskugel entsprechen: $\mathfrak{r}' - \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{P}$. Den Punkten einer Kurve des elliptischen Raumes wird so eine stetige Folge von Drehungen, also ein eingliedriger Drehvorgang der Kugel zugeordnet. Die Tangentenfläche (Torse) der Kurve bildet sich auf die beiden Polbahnen ab. Beim Fortschreiten von einem Kurvenpunkt zum benachbarten verhält sich die Kurventangente stationär (im Vergleich zu beliebigen Geraden durch die Kurvenpunkte). Dies spiegelt sich im augenblicklichen Stillstand des Drehpoles wider.

Die Bahnkurve eines in K befestigten Punktes $\mathfrak{x}$ kann als Ort der rechten Bildpunkte $\mathfrak{x}'$ aller Strahlen betrachtet werden, die die Bildkurve des D_I schneiden und zugleich im *Cliffords*chen Sinne linksparallel sind, d. h. dem Netz linksparalleler Geraden angehören, dessen Strahlen in $\mathfrak{x}$ den festen linken Bildpunkt haben.

Verfolgen wir nun die Krümmungsverhältnisse der beiden Polbahnen, sowie der Bildkurve im Parameterraum. Die erwähnte geometrische Deutung der Koeffizienten der Ableitungsgleichungen (6) und (7) gibt folgenden Zusammenhang zwischen der Krümmung $\varkappa$ und der Windung τ der Kurve $\mathfrak{P}(t)$ und den geodätischen Krümmungen c und c' der Gang-, bzw. Rastpolbahnen:

$$c = \frac{\tau + 1}{\varkappa}, \quad c' = \frac{\tau - 1}{\varkappa} \tag{9}$$

oder

$$\frac{c - c'}{2} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \frac{c + c'}{2} = \frac{\tau}{\varkappa} \tag{9'}$$

Einige Sonderfälle sind von Interesse:
$c = 0$ ergibt einen *Größtkreis als Gangpolbahn* (Evolventenbewegung). Das Bild des Drehvorganges im Parameterraum ist eine *Links-T-Kurve* ($\tau = -1$)[3]. —
$c' = 0$ führt auf einen *Größtkreis* der Kugel *als Rastpolbahn*. Die Bildkurve ist eine *Rechts-T-Kurve* ($\tau = +1$).
Für festes $c \neq 0$ wird die *Gangpolbahn ein Kreis* der Einheitskugel (Radius < 1), denn man kann leicht einsehen, daß die geodätischen Krümmungskreise einer Kugel gewöhnliche Kreise sind[4]. Die Kurve $\mathfrak{P}(t)$ im Parameterraum ist in diesem Fall *Böschungslinie* auf einem *Clifford*schen Linkszylinder, dessen Erzeugende von ihr unter dem festen Winkel ϑ mit $c = \operatorname{ctg} \vartheta$ geschnitten werden[5].

Ist $c' = \operatorname{ctg} \vartheta' \neq 0$ fest, so ist die *Rastpolbahn ein Kreis* und die Bildkurve im elliptischen Raum eine *Böschungslinie* auf einem *Clifford*schen Rechtszylinder (fester Schnittwinkel ϑ' zwischen Zylindererzeugenden und Kurve).

Sind c und c' fest, jedoch verschieden, so erhalten wir eine allgemeine *zyklische Bewegung* auf der Kugel, bei der *Gang- und Rastpolbahn Kreise* sind. Die Bildkurve $\mathfrak{P}(t)$ besitzt dann feste Krümmung und Windung, ist also eine *gewöhnliche Schraublinie* des elliptischen Raumes. — Diese

[3] Vgl. *E. Salkowski*, Jahresber. d. D. Math. Vereinig. **21** (1912) 27—52.

[4] Eine auf ihre Bogenlänge bezogene sphärische Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ besitzt die geodätische Krümmung $c = (\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}'\, \mathfrak{x}'')$. (Ableitung nach der Bogenlänge durch „Striche" bezeichnet!) Für festes c gilt $c' = (\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}'\, \mathfrak{x}''') = O$ oder $\mathfrak{x}''' = \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{x}'$. Wegen $(\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}'\, \mathfrak{x}') = 1$ ist $\lambda = 0$. Somit verschwindet die Windung

$$\tau = (\mathfrak{x}'\, \mathfrak{x}''\, \mathfrak{x}''') : (\mathfrak{x}''\, \mathfrak{x}'').$$

[5] Vgl. *H. R. Müller*, Monh. f. Math. **53** (1949) 151—164.

Schraublinie wird zum *Kreis*, wenn $c = -c' = \frac{1}{\varkappa}$ ist. In diesem Fall sind die Polbahnen gleich groß und rollen außen aufeinander. Schließlich schrumpfen die beiden Polbahnen auf Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ zusammen, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ im Parameterraum eine *Gerade* mit den Richtungsvektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ beschreibt. Es liegt dann eine *kontinuierliche Drehung* um den festen Punkt $\mathfrak{x}'$ vor.

Einer *ebenen Kurve* des Parameterraumes ($\tau = 0$) entsprechen Polbahnen mit entgegengesetzten geodätischen Krümmungen ($c + c' = 0$). In diesem Fall ist der Drehvorgang eine allgemeine *symmetrische Rollung*, bei der symmetrische Polbahnen aus symmetrischer Anfangslage aufeinander abrollen.

Geschlossene Drehvorgänge haben geschlossene Kurven des Parameterraumes zu Bildern. $\mathfrak{P}(t)$ besitzt dann eine Periode t^*. Die Drehzahl ν von D_I stimmt nach (8) – abgesehen von einem Faktor — mit dem Umfang der Bildkurve überein.:

$$2\pi\nu = \oint w\, dt = -2s.$$

Weiters finden wir für die Integrale der geodätischen Krümmungen u und u' der beiden Polbahnen die Beziehung $u - u' = 2s$.

Die Flächenmaße der von den Polbahnen berandeten Kugelstücke hängen nach dem *Gauß-Bonnet*schen Satze mit den geodätischen Gesamtkrümmungen und somit mit dem Umfang und der Gesamtwindung der Bildkurve $\mathfrak{P}(t)$ zusammen. Die der Periode t^* unseres Drehvorganges entsprechenden gleichen „Umfänge" der Polbahnen stimmen mit dem Integral g über die Krümmung von $\mathfrak{P}(t)$ überein.

Wir berechnen nun die geodätische Krümmung c_x der Bahnkurve eines in K befestigten Punktes $\mathfrak{x}$. Nach (4) gilt

$$\dot{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{d} \times \mathfrak{x}', \quad \ddot{\mathfrak{x}}' = \dot{\mathfrak{d}} \times \mathfrak{x}' + (\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')\,\mathfrak{d} - (\mathfrak{d}\,\mathfrak{d})\,\mathfrak{x}'$$

Wir finden daher

$$c_x = \frac{(\mathfrak{x}'\,\dot{\mathfrak{x}}'\,\ddot{\mathfrak{x}}')}{(\dot{\mathfrak{x}}'\,\dot{\mathfrak{x}}')^{3/2}} = \frac{(\mathfrak{d}\,\dot{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{x}') - (\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')^3 + (\mathfrak{d}\,\mathfrak{d})(\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')}{[(\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')^2]^{3/2}}.$$

Beziehen wir den Vektor $\mathfrak{x}'$ auf das Dreibein $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2', \mathfrak{x}_3'$, d. h. setzen wir $\mathfrak{x}' = x_1'\,\mathfrak{x}_1' + x_2'\,\mathfrak{x}_2' + x_3'\,\mathfrak{x}_3'$ und berücksichtigen $\mathfrak{d} = -2\dot{s}\,\mathfrak{x}_1'$, sowie $\varkappa = \dot{g} : \dot{s}$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck für die geodätische Krümmung

$$c_x = \frac{\varkappa x_3' - 2x_1'(1 - x_1'^2)}{2(1 - x_1'^2)^{3/2}}.$$

Nennen wir die Punkte $\mathfrak{x}'$ mit $c_x = 0$ *Wendepunkte*, so erfüllen diese die Gleichung

$$\varkappa x_3' - 2 x_1' (1 - x_1'^2) = o, \tag{10}$$

werden also für jeweils feste Werte t von einem Zylinder dritter Ordnung (Erzeugendenrichtung $= \mathfrak{r}_2'$) aus der Einheitskugel ausgeschnitten. Man kann nun leicht zeigen, daß diese Kurve auch auf einem Kegel dritter Ordnung mit der Spitze in $\mathfrak{o}$ liegt. – Dieser Wendepunktort berührt die Polbahnen im augenblicklichen Drehpol und hängt nur von der Krümmung $\varkappa$ der Bildkurve im Parameterraum ab, ändert also für zwangsläufige Drehvorgänge, die einer Kurve fester Krümmung des elliptischen Raumes entsprechen, nicht seine Gestalt.

Als *Wendepole* können wir jene Wendepunkte bezeichnen, die auf dem Größtkreis mit der Gleichung $x_2' = o$, also auf der sphärischen Normalen liegen, die im Drehpol $\mathfrak{r}_1'$ auf die sich dort berührenden Polbahnen errichtet werden kann. Der Kugelgleichung, sowie (10) Rechnung tragend, finden wir für diese Wendepole die Darstellung

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{r}_1' \cos\omega + \mathfrak{r}_3' \sin\omega \quad \text{mit} \quad \sin 2\omega = \varkappa. \tag{11}$$

Für $|\varkappa| < 1$ erhalten wir — falls bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrisch liegende Punkte nicht unterschieden werden — zwei reelle getrennte Wendepole; für $|\varkappa| = 1$ fallen sie zusammen.

Einer Schraubung des elliptischen Raumes mit der Darstellung $\widehat{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{S}$ entsprechen die Drehungen $\widehat{\mathfrak{r}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{S}$, $\widehat{\mathfrak{r}}' = \overline{\mathfrak{S}'}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{S}'$ der Richtungskugeln. (Hiebei ist $\mathfrak{S}\,\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}'\,\overline{\mathfrak{S}'} = 1$.) — Die *Schmiegschraube* führt das mit der Kurve $\mathfrak{P}(t)$ verbundene Polartetraeder jeweils in seine „Nachbarlage" über. Hiebei werden die Dreibeine der Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_i$, bzw. $\mathfrak{r}_i'$ in ihre Nachbarlagen gedreht. Diese infinitesimalen Drehungen sind aber durch die *Darboux*schen Drehvektoren $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1 \dot{u}\,dt + \mathfrak{r}_3 \dot{g}\,dt$, $\mathfrak{s}' = \mathfrak{r}_1' \dot{u}'\,dt + \mathfrak{r}_3' \dot{g}\,dt$ gekennzeichnet. Diese durchstoßen die Einheitskugel in den Krümmungsmittelpunkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ der Gang-, bzw. Rastpolbahn.

$$\mathfrak{m} \quad \frac{\mathfrak{r}_1 \dot{u} + \mathfrak{r}_3 \dot{g}}{\sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}^2}} = \frac{c\,\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \mathfrak{m}' = \frac{\mathfrak{r}_1' \dot{u}' + \mathfrak{r}_3' \dot{g}}{\sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}'^2}} = \frac{c'\,\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_3'}{\sqrt{1+c'^2}}.$$

Die infinitesimalen Drehwinkel sind $2\sigma = \sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}^2}\,dt$, $2\sigma' = \sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}'^2}\,dt$. Die Schmiegschraube von $\mathfrak{P}(t)$ ist somit durch die Quaternionen $\mathfrak{S} = \cos\sigma + \mathfrak{m}\sin\sigma = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{S}' = \cos\sigma' + \mathfrak{m}'\sin\sigma' = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{s}'$ bestimmt. Ihre Achsen sind $[\pm\,\mathfrak{m}, \pm\,\mathfrak{m}']$.

Die Krümmungsmittelpunkte der beiden Polbahnen sind daher die kinematischen Bildpunkte der Achsen der Schmiegschraube der Bildkurve des Drehvorganges D_{I}.

Flächenläufige Drehvorgänge.

Nun sei die Quaternion $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(u_1, u_2)$ von zwei reellen Parametern u_1, u_2 abhängig. Durch (1) wird nun ein zweigliedriger oder flächenläufiger Drehvorgang D_{II} erklärt. Im elliptischen Parameterraum beschreibt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(u_1, u_2)$ eine Fläche als Bild von D_{II}. Mit dem Flächenpunkt $\mathfrak{P}$ verbinden wir nun ein „begleitendes" Polartetraeder $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$. Hiebei ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ und der Eckpunkt $\mathfrak{P}_3$ der Pol (bezüglich der absoluten Quadrik der elliptischen Maßbestimmung) zur Tangentialebene an die Bildfläche im Punkte $\mathfrak{P}_0$. Die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind nur bis auf Drehungen um $\mathfrak{P}_0$ in der Tangentialebene bestimmt. Die Kanten des Tetraeders, die $\mathfrak{P}_0$ mit $\mathfrak{P}_i$ verbinden, bezeichnen wir wiederum mit G_i; ihre Richtungsvektoren seien $\mathfrak{r}_i$ $\mathfrak{r}_i'$. Wir erhalten folgende Ableitungsgleichungen[6]:

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= \quad * \quad + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \alpha_2 \mathfrak{P}_2 \quad * \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1 \mathfrak{P}_0 \quad * \quad + \beta_3 \mathfrak{P}_2 - \beta_2 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2 \mathfrak{P}_0 - \beta_3 \mathfrak{P}_1 \quad * \quad + \beta_1 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_3 &= \quad * \quad + \beta_2 \mathfrak{P}_1 - \beta_1 \mathfrak{P}_2 \quad * \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{r}_1 &= \quad * \quad + \omega_3 \mathfrak{r}_2 - \omega_2 \mathfrak{r}_3 \\ d\,\mathfrak{r}_2 &= -\omega_3 \mathfrak{r}_1 \quad * \quad + \omega_1 \mathfrak{r}_3 \\ d\,\mathfrak{r}_3 &= +\omega_2 \mathfrak{r}_1 - \omega_1 \mathfrak{r}_2 \quad * \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{r}_1' &= \quad * \quad + \omega_3 \mathfrak{r}_2' - \omega_2' \mathfrak{r}_3' \\ d\,\mathfrak{r}_2' &= -\omega_3 \mathfrak{r}_1' \quad * \quad + \omega_1' \mathfrak{r}_3' \\ d\,\mathfrak{r}_3' &= +\omega_2' \mathfrak{r}_1' - \omega_1' \mathfrak{r}_1' \quad * \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \omega_i, \omega_i'$ sind lineare Differentialformen (*Pfaff*sche Formen) in den du_i; zwischen ihnen bestehen die Beziehungen $\omega_i = \beta_i + \alpha_i$, $\omega_i' = \beta_i - \alpha_i$, $\omega_3 = \beta_3$ und sind folgende Integrierbarkeitsbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} d\,\beta_1 &= [\beta_3 \beta_2],\ d\,\beta_2 = [\beta_1 \beta_3],\ d\,\beta_3 = [\beta_2 \beta_1] + [\alpha_2 \alpha_1] \\ d\,\alpha_1 &= [\beta_3 \alpha_2],\ d\,\alpha_2 = [\alpha_1 \beta_3],\ 0 \quad = [\beta_2 \alpha_1] + [\alpha_2 \beta_1] \end{aligned}$$

Hiebei bedeuten die Klammern die „alternierenden Produkte" der eingeschlossenen Differentialformen. $\Phi_0 = [\alpha_1 \alpha_2]$ ist das Flächenelement der Bildfläche. Wir setzen $\Phi_0 \neq 0$ voraus.

Aus D_{II} soll nun ein eingliedriger Drehvorgang D_{I} an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) herausgegriffen werden, dem eine Kurve auf der Bildfläche des Parameterraumes entspricht, die durch den Punkt $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$

[6] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O. § 18.

geht. Dies kann durch Vorgabe von $u_i = u_i(t)$ geschehen oder auch dadurch, daß man, von der Stelle (u_1, u_2) ausgehend, das Verschwinden einer vorgegebenen *Pfaff*schen Form verlangt. Nach (5) und (12) können wir nun die zu D_{I} gehörigen Drehpole berechnen. Wir finden

$$\mathfrak{p}' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \frac{\alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \alpha_2 \mathfrak{P}_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{\alpha_1 \mathfrak{r}_1' + \alpha_2 \mathfrak{r}_2'}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \mathfrak{r}_1' \cos\tau + \mathfrak{r}_2' \sin\tau. \tag{14}$$

Im besonderen legen die Differentialgleichungen (*Pfaff*sche Formen) $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$ zwei zwangläufige Drehvorgänge fest, die in D_{II} enthalten sind und in K' die Drehpole $\mathfrak{r}_2' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{P}_2$, bzw. $\mathfrak{r}_1' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{P}_1$ besitzen. Der Vektor $\mathfrak{p}'$ eines allgemeinen zwangsläufigen Drehvorganges durch die Stelle (u_1, u_2) ist somit auf $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ aufgespannt. Ändert sich der Winkel τ, der von der Tetraederkante $G_1 = \{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1\}$ und der gerichteten Kurventangente im Punkte $\mathfrak{P}_0$ eingeschlossen wird, so durchläuft $\mathfrak{p}'$ einen Größtkreis in K', dessen Ebene auf $\mathfrak{r}_3'$ senkrecht steht. Gleiches gilt für die ungestrichenen Größen der Gangkugel K. Die Drehpole aller D_{I}, die aus D_{II} an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) herausgehoben werden können, liegen daher in K, wie in K' auf je einem Größtkreis. Diese „*Polkreise*" sind längentreu aufeinander bezogen. — Der früher erwähnten liniengeometrischen Auffassung des Parameterraumes zufolge entsprechen die Punkte dieser Polkreise den gerichteten Flächentangenten, die in der Tangentialebene des Punktes $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ ein Büschel bilden.

Wir können der Stelle (u_1, u_2) von D_{II} nun in K den Endpunkt von $\mathfrak{r}_3$, in K' den von $\mathfrak{r}_3'$ als augenblicklichen „*Pol*" zuordnen. $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ beschreiben als Richtungsvektoren der gerichteten Flächennormalen G_3 die „sphärischen Bilder" der Fläche $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ des elliptischen Raumes. Die von *R. Bricard*[7] erkannte *Flächentreue dieser Polzuordnung* entspricht somit der Tatsache, daß die Richtungsvektoren der Flächennormalen einer Fläche auf der Einheitskugel flächentreu aufeinander bezogene sphärische Bilder beschreiben. Es gilt für die Flächenelemente

$$\Omega = [\omega_1 \omega_2] = [\omega_1' \omega_2'] = \Omega'.$$

Statt von der Flächentreue der Polzuordnung können wir auch von der *Dichtetreue der Polkreiszuordnung* sprechen.

Schreibt man umgekehrt die flächentreue Polzuordnung, also die Zuordnung zwischen $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ vor, so bilden die Geraden $G_3 = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ eine Normalenschar (Normalensystem) des elliptischen Raumes. Zu

[7] *R. Bricard*, C. R. Acad. Sci. Paris **166** (1918) 734—735.

dieser Normalenschar gehört aber immer eine Schar „paralleler" Flächen, die von den ∞^2 Geraden des Normalensystems rechtwinkelig durchsetzt werden und als Bildflächen „paralleler" D_{II} mit der vorgegebenen Polzuordnung fungieren. Wird im besonderen die Polzuordnung mit $\Omega = \Omega' = 0$ festgelegt, so besteht das Normalensystem aus den sämtlichen Flächennormalen einer Schar paralleler abwickelbarer Flächen. Für eine solche abwickelbare Fläche *Bianchi*'s verschwindet das *Gauß*sche Krümmungsmaß identisch. Ihr entspricht ein D_{II}, bei dem *eine in K befestigte Kurve ständig eine feste Kurve von K' berührt*[8].

Nun legen wir besondere eingliedrige Drehvorgänge durch die betrachtete Stelle von D_{II}:

1. Berühren die Polbahnen jeweils den Polkreis, so sprechen wir von einem *Schmieg-*D_I. Es muß dann $(\mathfrak{r}_3' \, d\,\mathfrak{p}') = 0$ gelten. Aus (14) folgt

$$d\,\mathfrak{p}' = -(\omega_3 + d\tau)\,\mathfrak{r}_1' \sin\tau + (\omega_3 + d\tau)\,\mathfrak{r}_2' \cos\tau + (\omega_1' \sin\tau - \omega_2' \cos\tau)\,\mathfrak{r}_3' \tag{15}$$

und daher $\omega_1' \sin\tau - \omega_2' \cos\tau = 0$ oder $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Dies ist aber die Differentialgleichung der Schmiegtangentenlinien auf der Bildfläche $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ des elliptischen Parameterraumes.

2. Durchsetzen die Polbahnen jeweils die Polkreise senkrecht, so liegt ein *geodätischer* zwangsläufiger Drehvorgang von D_{II} vor. $d\mathfrak{p}'$ muß nun die Richtung von $\mathfrak{r}_3'$ haben und somit $\omega_3 + d\tau = 0$ sein. Dies besagt, daß die D_I entsprechende Kurve des Parameterraumes eine geodätische Linie auf der Bildfläche von D_{II} ist. Die geodätische Krümmung c einer Flächenkurve ist nämlich $c = (\omega_3 + d\tau) : d\sigma_0$, wobei $d\sigma_0^2 = (d\,\mathfrak{P}_0\, d\,\mathfrak{P}_0) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ das Quadrat des Bogenelementes der Fläche $\mathfrak{P}_0$ ist.

3. Schließlich bezeichnen wir einen eingliedrigen Drehvorgang von D_{II} als *Krümmungs-*D_I, wenn die Zuordnung der Pole $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_3'$ längs D_I längentreu ist, in K und K' diese Pole also Kurven bilden, die durch gleiche Bogenlängen aufeinander bezogen sind. Wegen $\mathfrak{r}_3' = \overline{\mathfrak{P}}_0\,\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{P}_0$ fallen nach der jeweiligen Drehung $\mathfrak{P}_0$ entsprechende Punkte dieser Kurven zusammen, ohne sich jedoch zu berühren $(d\,\mathfrak{r}_3' = \overline{\mathfrak{P}}_0\, d\,\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{P}_0)$. — Es gilt für einen Krümmungs-D_I

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_1'^2 + \omega_2'^2 \text{ oder } \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0. \tag{16}$$

Dies ist aber die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche des elliptischen Raumes. $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ sind die Richtungsvektoren

[8] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O. § 21.

der Flächennormalen, die längs einer Krümmungslinie eine Torse durchläuft.

Aus den bekannten Eigenschaften von Krümmungslinien und Schmiegtangentenlinien einer Fläche folgt nun, daß die zu den beiden Krümmungs-D_{I} gehörigen Drehpole unter einem rechten Winkel aus dem Kugelmittelpunkt gesehen werden und die Drehpole der beiden Schmieg-D_{I} zu ihnen symmetrisch liegen, d. h. von dem einen der Krümmungsdrehpole etwa einen Abstand $\pm\, \tau_0$ besitzen. Für den sphärischen Abstand $2\,\tau_0$ der beiden Schmiegdrehpole findet man leicht

$$\operatorname{tg} 2\,\tau_0 = -\frac{\sqrt{1 - K_0}}{H_0}$$

mit H_0 der mittleren Krümmung und K_0 dem Krümmungsmaß der Fläche $\mathfrak{P}_0\,(u_1, u_2)$ im elliptischen Raum. – Für *Torsen* wird $K_0 \equiv +1$ und fallen die beiden Schmieg-D_{I} und damit ihre Drehpole stets zusammen. – Ist überall $\tau_0 = \pi : 1$, so verschwindet H_0 identisch und liegt eine *Minimalfläche* vor.

Ist an einer Stelle (u_1, u_2) von D_{II} die *Bricard*sche Polzuordnung nicht nur flächentreu, sondern in jeder „Fortschreitungsrichtung" auch längentreu, ist also (16) für (u_1, u_2) identisch erfüllt, so können wir diese Stelle als eine *Nabelstelle* von D_{II} bezeichnen. Ihr entspricht im Parameterraum ein Nabelpunkt der Bildfläche. — Ist ein D_{II} so beschaffen, daß an jeder Stelle die Polzuordnung längentreu erfolgt, so ist seine Bildfläche eine *Kugel*. Da deren Flächennormalen $G_3 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ stets durch den Kugelmittelpunkt $\mathfrak{M}$ gehen, gilt für die Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_3'$ – $\mathfrak{M}\,\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{M}$. Diese Inzidenzbedingung besagt, daß die augenblicklichen Pole eines *Kugel*-D_{II} aus ihrer Anfangslage $\mathfrak{r}_3$ in K durch eine feste Drehung $\mathfrak{M}$ in ihre Lage $\mathfrak{r}_3'$ in K' übergehen.

Die Bedingung (16) ist natürlich auch erfüllt, wenn $\beta_1 = \beta_2 = o$. Nun ist $\mathfrak{P}_3$ fest und übernimmt die Rolle von $\mathfrak{M}$. Die Kugel artet in eine *Ebene* aus (Radius $= \pi/2$).

Nun einige Bemerkungen zu Drehvorgängen, denen im Parameterraum *geradlinige Flächen* entsprechen:

Wie schon erwähnt, wird durch die Punkte einer Geraden des elliptischen Raumes ein zwangsläufiger Drehvorgang bestimmt, der aus einer kontinuierlichen Drehung um einen festen Drehpol $\mathfrak{r}'$ besteht. Auch in der Ausgangslage von K ist der Punkt $\mathfrak{r}$ fest. – Hängt nun die Gerade $G = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ von einem reellen Parameter t ab, durchläuft sie also eine *Regelfläche* des Parameterraumes, so wird ein D_{II} dargestellt,

der eine Zerlegung in ∞^1 D_I gestattet, die jeweils kontinuierliche Drehungen um einen festen Punkt (Drehzentrum) sind. Diese Drehzentren erfüllen auf der Kugel eine Kurve $\mathfrak{r}'(t)$, die durch gleiche Werte t auf die Kurve $\mathfrak{r}(t)$, den Ort der Drehzentren in der Ausgangslage von K bezogen ist. Diese Beziehung ist dann und nur dann längentreu, wenn die Regelfläche eine *Torse* ist. In diesem Fall sind die Orte dieser Drehzentren die Polbahnen jenes im D_II enthaltenen D_I, dem im Parameterraum die Gratlinie der Torse entspricht.

Schrumpft dieser Drehzentrenort im bewegten System K oder auf der festen Kugel K' auf einen Punkt zusammen, im jeweils anderen System jedoch nicht, ist also entweder $d\,\mathfrak{r} = o$ oder $d\,\mathfrak{r}' = o$, so entspricht unserem Drehvorgang D_II im elliptischen Parameterraum ein *Cliffords*cher *Links-, bzw. Rechtszylinder.* Im ersten Fall ist also der Punkt $\mathfrak{r}$ in der Ausgangslage von K fest und kommt der Reihe nach mit den Punkten der Kurve $\mathfrak{r}'(t)$ in K' zur Deckung, die jeweils als Drehzentren für kontinuierliche Drehungen fungieren. Im zweiten Fall werden die einzelnen Punkte der Kurve $\mathfrak{r}(t)$ in die feste Lage $\mathfrak{r}'$ gebracht und erfolgen dann um diesen Punkt die kontinuierlichen Drehungen. —

Wir greifen aus dem D_II nun alle jene D_I heraus, die an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) die gleichen Drehpole $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ besitzen. Als Bilder im Parameterraum ergeben sich alle Flächenkurven durch den Punkt $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$, die dort die gleiche Flächentangente berühren.

Ist $\varkappa$ die Krümmung der Bildkurve des ins Auge gefaßten D_I, ϑ der Winkel, den die Hauptnormale dieser Kurve mit der Flächennormale G_3 einschließt, und bedeutet $\varkappa^*$ die Krümmung der geodätischen Linie (im besonderen etwa des Normalschnittes) durch den Flächenpunkt in Richtung der Flächentangente, so gilt nach dem Satz von *Meusnier*

$$\varkappa^* = \varkappa \cdot \cos\vartheta.$$

Der Zusammenhang mit der geodätischen Krümmung c unserer Flächenkurve ist durch $c = \varkappa \cdot \sin\vartheta$ gegeben.

Wir wollen nun für die betrachteten Drehvorgänge D_I die *Wendepunktorte* untersuchen.

Zwecks Vereinfachung der Rechnungen drehen wir erst einmal das die Fläche im elliptischen Raum begleitende Polartetraeder so um die Flächennormale, daß die herausgegriffene Flächentangente zur Tetraederkante wird. Dann erleiden auch in K und K' die von $\mathfrak{r}_i$, bzw. $\mathfrak{r}_i'$ gebildeten Dreibeine Drehungen um $\mathfrak{r}_3$, bzw. $\mathfrak{r}_3'$. Man kann etwa setzen:

$\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{p}' = +\mathfrak{r}_1' \cos\tau + \mathfrak{r}_2' \sin\tau$, $\mathfrak{q}_2' = -\mathfrak{r}_1' \sin\tau + \mathfrak{r}_2' \cos\tau$, $\mathfrak{q}_3' = \mathfrak{r}_3'$.

Um Formel (10) anwenden zu können, müssen wir unser Polartetraeder und damit die Dreibeine von K und K' abermals drehen, bis die Kante G_3 in die Hauptnormale der Flächenkurve fällt. Die feste Tangente dient für diese Drehung als Drehachse; der Drehwinkel ist $\frac{\pi}{2} - \vartheta$.

$\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}_2' = +\mathfrak{q}_2' \sin\vartheta + \mathfrak{q}_3' \cos\vartheta$, $\mathfrak{p}_3' = -\mathfrak{q}_2' \cos\vartheta + \mathfrak{q}_3' \sin\vartheta$.

Beziehen wir den Vektor $\mathfrak{x}' = x_1' \mathfrak{r}_1' + x_2' \mathfrak{r}_2' + x_3' \mathfrak{r}_3'$ nun auf diese Dreibeine der $\mathfrak{q}_i'$ und $\mathfrak{p}_i'$, setzen wir also $\mathfrak{x}' = y_1' \mathfrak{q}_1' + y_2' \mathfrak{q}_2' + y_3' \mathfrak{q}_3' = z_1' \mathfrak{p}_1' + z_2' \mathfrak{p}_2' + z_3' \mathfrak{p}_3'$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= +x_1' \cos\tau + x_2' \sin\tau \\ y_2' &= -x_1' \sin\tau + x_2' \cos\tau \\ y_3' &= x_3' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} z_1' &= y_1' \\ z_2' &= +y_2' \sin\vartheta + y_3' \cos\vartheta \\ z_3' &= -y_2' \cos\vartheta + y_3' \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$\mathfrak{x}'$ beschreibt nach (10) gerade einen Wendepunkt, wenn

$$\varkappa z_3' - 2 z_1' (1 - z_1'^2) = o.$$

Durch Einsetzen von (17) ergibt sich daraus die Gleichung im Dreibein der $\mathfrak{q}_i'$:

$$c\, y_3' - \varkappa^* y_2' - 2 y_1' + 2 y_1'^3 = o$$

Nur der Koeffizient c hängt hierin von der Wahl der Kurve durch das festgehaltene Linienelement auf der Bildfläche $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ ab. In der Ebene $x_3' = y_3' = o$ liegen somit, abgesehen vom Drehpol, im allgemeinen noch zwei Punkte $\mathfrak{h}'$, die den sämtlichen Wendepunktorten aller betrachteten D_{I} angehören. Für sie gilt:

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{q}_1' \cos\eta + \mathfrak{q}_2' \sin\eta = \mathfrak{r}_1' \cos\xi + \mathfrak{r}_2' \sin\xi$$

mit

$$\varkappa^* = -\sin 2\eta = \sin 2(\tau - \xi).$$

Alle zwangsläufigen Drehvorgänge, die in einem flächenläufigen Drehvorgang enthalten sind und an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) gemeinsame Drehpole besitzen, haben im allgemeinen zwei Wendepunkte gemeinsam, die auf dem Polkreis liegen.

Nun ermitteln wir die *Wendepole* eines aus D_{II} herausgehobenen D_{I}. Nach (11) gilt für die Wendepole die Darstellung

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{p}_1' \cos\omega + \mathfrak{p}_3' \sin\omega = \mathfrak{q}_1' \cos\omega - \mathfrak{q}_2' \cos\vartheta \sin\omega + \mathfrak{q}_3' \sin\vartheta \sin\omega,$$

wobei $\sin 2\omega = \varkappa$ ist. Daraus finden wir leicht die Gleichung des Ortes des Wendepole aller D_{I} mit gemeinsamen Drehpolen. Wir setzen

$$y_1' = \cos\omega,\ y_2' = -\cos\vartheta\sin\omega,\quad y_3' = \sin\vartheta\sin\omega$$

in $\varkappa^* = \cos\vartheta\sin 2\omega$ ein und erhalten im System der $\mathfrak{q}_i'$ die Bedingung

$$2\,y_1'\,y_2' + \varkappa^* = o. \tag{18}$$

Der Wendepolort aller D_{I} mit gemeinsamen Drehpolen wird also von einem hyperbolischen Zylinder (mit der Achsenrichtung $\mathfrak{q}_3' \ldots \mathfrak{r}_3'$) aus der Einheitskugel ausgeschnitten. Betrachtet man das durch diese beiden Flächen festgelegte Büschel von Flächen zweiter Ordnung

$$\lambda\,(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 - 1) + \mu\,(2\,y_1'\,y_2' + \varkappa^*) = o,$$

so sieht man, daß für $\lambda \ldots \mu\,\varkappa^*$ ihm der Kegel zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$\varkappa^*\,(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2) + 2\,y_1'\,y_2' = o$$

als singuläre Fläche angehört. Seine Spitze liegt in $\mathfrak{o}$. *Der Wendepolort ist somit ein sphärischer Kegelschnitt.*

Auf ihm liegen auch die früher betrachteten Punkte $\mathfrak{h}'$; sie sind Wendepole des geodätischen D_{I} durch die Stelle (u_1, u_2) von D_{II} bei festgehaltenen Drehpolen, denn die zugehörigen Polbahnen durchsetzen dort den Polkreis senkrecht. *Diese „geodätischen Wendepole" sind also die Schnittpunkte des Polkreises mit dem Wendepolort, der ein sphärischer Kegelschnitt ist und in ihnen Scheitelpunkte besitzt.* Durch sie gehen sämtliche Wendepunktkurven von zwangsläufigen Drehvorgängen mit festen Drehpolen. — Aus (18) folgert man, daß der Wendepolort für $|\varkappa^*| < 1$ reell ist. Für $|\varkappa^*| = 1$ zieht er sich auf einen Punkt zusammen.

Gelenkvierecke auf der Kugel: Wir fragen zuerst nach allen Geraden $X = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}']$ des Parameterraumes, deren linke Bildpunkte $\mathfrak{x}$ in der kinematischen Abbildung, die unseren Überlegungen zugrunde liegt, fest sind, während die rechten Bildpunkte $\mathfrak{x}'$ einen Kreis mit dem sphärischen Mittelpunkt $\mathfrak{m}'$ durchlaufen. Wir fassen neben diesen Geraden X noch alle Gerade $Y = [\mathfrak{y}, \mathfrak{y}']$ mit festen rechten Bildpunkten $\mathfrak{y}'$ ins Auge, für die umgekehrt die linken Bildpunkte $\mathfrak{y}$ auf einem Kreis um $\mathfrak{m}$ beweglich sind. Falls $\mathfrak{m} = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{y}'$ gewählt wird und die „Kreisradien" ϱ gleich sind, also $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}') = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{m}') = \cos\varrho$ gilt, durchläuft X den linksparallelen und Y den rechtsparallelen Regulus einer *Cliffords*chen Quadrik. Die Erzeugenden X und Y schneiden sich unter dem festen Winkel ϱ und ihre Punkte haben von den Achsen $[\pm\mathfrak{m}, \pm\mathfrak{m}']$ den Abstand $\pm\varrho : 2$, bzw. $(\pi \pm \varrho) : 2$.

Ist die freie Beweglichkeit der beiden Kugelschalen K, K' nur durch die Bedingung eingeschränkt, daß ein in K befestigter Punkt $\mathfrak{x}$ eine Kreisbahn in K' beschreibt, also $\mathfrak{x}'$ auf obigem Kreis wandert, so kann die *Clifford*sche Quadrik als Bild dieser sphärischen *Einklammerbewegung* angesehen werden. Den Punkten der Erzeugenden X entsprechen hiebei die kontinuierlichen Drehungen von K um $\mathfrak{x}'$.

Werden nun zwei Punkte $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ von K auf Kreisen um $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$ geführt, so ist die Bildkurve des dadurch bestimmten eingliedrigen Drehvorganges (Sphärische *Zweiklammerbewegung*) als Durchdringungskurve zweier *Clifford*scher Quadriken von vierter Ordnung und erster Art. Diese Kurve hängt natürlich auch noch von der Ausgangslage der Punkte $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_2'$, d. h. von der Wahl des „Koppelstückes" ab. Seine Länge λ ist durch $(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{x}_1'\,\mathfrak{x}_2') = \cos\lambda$ festgelegt. Bloße Änderung der Koppellänge führt zu Lagenänderungen (Bewegungen) obiger *Clifford*schen Flächen und somit zu einer anderen Schnittkurve.

Übereinstimmung der „Armlängen" $\varrho_1 = \varrho_2$ mit $(\mathfrak{m}_i'\,\mathfrak{x}_i') = \cos\varrho_i$ ergibt zwei kongruente *Clifford*sche Flächen. Ist außerdem noch $(\mathfrak{m}_1'\,\mathfrak{m}_2') = (\mathfrak{x}_1'\,\mathfrak{x}_2')$, haben also gegenüberliegende Seiten des Gelenkvierecks gleiche Länge, so schneiden sich die Achsen und die beiden Flächen berühren sich doppelt. Die Bildkurve des D_1 zerfällt in zwei Kegelschnitte.

Ist das Gelenkviereck ein *Deltoid*, gilt also etwa $(\mathfrak{m}_1'\,\mathfrak{x}_1') = (\mathfrak{m}_1'\,\mathfrak{m}_2')$, $(\mathfrak{x}_2'\,\mathfrak{x}_2') = (\mathfrak{m}_2'\,\mathfrak{x}_2')$, so zerfällt das Bild im Parameterraum in eine Kurve dritter Ordnung und eine Gerade. Letztere entspricht der kontinuierlichen Drehung, die für das Zusammentreffen von $\mathfrak{x}_1'$ mit $\mathfrak{m}_2'$ möglich ist.

Krümmungskreise und Evoluten reeller Kegelschnitte bei Cayley-Klein'scher Metrik.

Von

Hermann Böheim, Graz.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 31. Mai 1950.)

Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, neben dem Nachweis eines bemerkenswerten Satzes über oskulierende Kegelschnitte eine weitgehende Übereinstimmung von Eigenschaften der Krümmungskreise und der Evolute eines Kegelschnittes bei euklidischer und Cayley-Klein'scher Metrik aufzuzeigen und die Doppelpunkte der Evolute zu konstruieren.

Unseren Betrachtungen liege eine projektive Ebene zugrunde, welcher durch einen Maßkegelschnitt m eine nichteuklidische Metrik nach Cayley-Klein'schem Muster aufgeprägt ist. Als normal gelten dabei jene Geraden, welche bezüglich m konjugiert sind, als Kreise jene Kegelschnitte, welche m doppelt berühren, wobei hier von der Unterscheidung zwischen Kreisen, Grenzkreisen und Abstandslinien abgesehen werden soll. Der Berührungspol eines Kreises heißt sein Mittelpunkt, die Berührungssehne seine Mittellinie. Ein Kreis ist i. a. durch drei Punkte vierdeutig bestimmt. Hat der Kreis mit einer Kurve drei zusammenfallende Punkte und daher auch drei zusammenfallende Tangenten gemein, so heißt er ein Krümmungskreis der Kurve, sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt der Kurve im Berührungspunkt. Der Krümmungskreis in einem regulären Kurvenpunkte ist eindeutig bestimmt, seine Konstruktion für Kegelschnitte hat der Verfasser seinerzeit mitgeteilt[1].

---

[1] *H. Böheim,* Zur Konstruktion der Schmiegungsebene an die Raumkurve 4. Ordnung 1. Art. Zschr. f. Realschulwesen (1912), 651—656.

Die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ und die drei harmonischen Kollineationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Der gegebene Kegelschnitt k_1 habe mit m (zunächst) vier getrennte Tangenten u_i gemeinsam, deren sechs Schnittpunkte die Brennpunkte von k_1 bedeuten. Sie liegen paarweise auf den drei Seiten des gemeinsamen Poldreiseits von k_1 und m, welche die Achsen von k_1 darstellen. Alle Kegelschnitte der Schar $(k_1\ m)$ heißen konfokal. m und k_1 bestimmen die Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ doppelt konjugierter Strahlen $x \leftrightarrow x^*$, welche birational-involutorisch und quadratisch ist, das gemeinsame Poldreiseit a, b, c von k_1 und m als Hauptdreiseit besitzt und i. a. Berührungen invariant läßt. Die Eckpunkte des Hauptdreiseits seien $A = bc$, $B = ca$, $C = ab$. Durchläuft x die Tangentenschar von k_1, so durchläuft x^* die Reihe der zugehörigen Normalen, welche die Evolute $k_1{}^*$ von k_1 einhüllen; es ist dies eine Kurve 4. Klasse, welche die Seiten a, b, c des Hauptdreiseits als Doppeltangenten besitzt. k_1 und m gestatten die drei harmonischen Kollineationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in sich, welche je eine der Ecken A, B, C als Zentrum und die gegenüberliegende Seite des Hauptdreiseits als Achse besitzen. Daher wird auch $k_1{}^*$ durch diese Kollineationen in sich selbst transformiert. Die Krümmungskreise in den sechs Schnittpunkten von k_1 mit a, b, c müssen daher k_1 superoskulieren (Scheitelkrümmungskreise).

Die Evolute ist aber nicht nur die Hüllkurve der Normalen, sondern auch der Ort der Krümmungsmittelpunkte von k_1.

Folgerungen.

1. Da $\mathfrak{T}$ auch durch k_1 und einen beliebigen Kegelschnitt der Schar $(k_1\ m)$ bestimmt ist, der die Funktion eines absoluten Gebildes übernehmen kann, z. B. ein zerfallender, etwa das Brennpunktepaar F, $\bar{F}$ von k_1, so ist die nichteuklidische Evolute von k_1 zugleich eine pseudoeuklidische, bekannt unter dem Namen projektive Astroide und kollinear verwandt mit der euklidischen Evolute eines Kegelschnitts.

2. Wird k_1 von der beliebigen Tangente t_1 in T_1 berührt, so gibt es durch T_1 einen zweiten Kegelschnitt k_2 der Schar $(k_1\ m)$, welcher bekanntlich $t_1{}^*$ zur Tangente in T_1 hat. Es gibt dann einen einzigen Kegelschnitt o_m, welcher k_1 in T_1 oskuliert und m doppelt berührt, nämlich den Krümmungskreis, welcher seinen Mittelpunkt M_1 auf $t_1{}^*$ haben muß. Ersetzt man m durch einen anderen Maßkegelschnitt der Schar $(k_1\ m)$, so bleibt

die Transformation $\mathfrak{T}$ davon unbehelligt, es entsteht daher dieselbe Hüllkurve der Normalen von k_1, daher auch derselbe Krümmungsmittelpunkt M_1 von k_1, obwohl sich der Krümmungskreis ändert. M_1 ist also auch der Berührungspol (= Mittelpunkt) jenes Kegelschnittes o_2, welcher k_1 in T_1 oskuliert und k_2 doppelt berührt. o_2 zerfällt aber in das Punktpaar T_1 T_2, in welchem k_2 von t_1 geschnitten wird. *Der Krümmungsmittelpunkt M_1 ist daher der Pol von t_1 in Bezug auf k_2, das ist in Bezug auf den durch T_1 gehenden konfokalen Kegelschnitt.* Ein beliebiger Kegelschnitt k_n der konfokalen Schar $(k_1\, m)$ wird von einem einzigen Kegelschnitt o_n doppelt berührt, welcher zugleich k_1 in T_1 oskuliert. Da M_1 der bei veränderlichem k_n konstante Berührungspol ist, sind die Tangenten aus M_1 an die Kegelschnitte k_n zugleich die Tangenten der Doppelberührung von k_n und o_n. Sie bilden nach dem Satze von Desargues eine Strahleninvolution, und jeder ihrer Doppelstrahlen wird in M_1 von je einem Kegelschnitt der Schar $(k_1\, m)$ berührt, welcher von dem zugehörigen Kegelschnitt o superoskuliert wird. Die Kegelschnitte o_n haben drei mit t_1 zusammenfallende Tangenten gemein, aus M_1 gehen an sie Tangentenpaare einer Involution, nämlich die Tangenten an die Schar $(k_1\, m)$, daher bilden die Kegelschnitte o_n eine Oskulationsschar. Ihr vierter Grundstrahl t ist die 4. gemeinsame Tangente von o_2 und k_1, also die 2. Tangente durch T_2 an k_1. Es gilt daher:

Satz I:

Der Krümmungsmittelpunkt eines Kegelschnittes k_1 in einem Punkte T_1 mit der Tangente t_1 ist der Pol von t_1 in Bezug auf den durch T_1 gehenden konfokalen Kegelschnitt k_2. Der Krümmungskreis in T_1 berührt die 2. Tangente t, welche man durch den 2. Schnittpunkt T_2 von t_1 und k_2 an k_1 legen kann[2].

Bedeutet m nicht den Maßkegelschnitt, sondern einen beliebigen Kegelschnitt der Schar $(k_1\, k_2)$, so kann das Ergebnis auch ganz allgemeingültig, also sowohl im euklidischen, als auch nichteuklidischen Sinne, folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz II:

[2] Daß der Krümmungsmittelpunkt der Pol der Tangente in Bezug auf den durch den Berührungspunkt gehenden konfokalen Kegelschnitt ist, ist im Gebiet der euklidischen Metrik bekannt und findet sich in *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1. Bd., p. 441 (Aufl. 7). Die Begründung geht aus unserer Beweisführung sofort hervor, wenn man sie auf die Schar euklidisch-konfokaler Kegelschnitte anwendet. Zusätzlich ergibt sich, daß der euklidische Krümmungskreis die 2. Tangente durch T_2 an k_1 berührt.

Ist T_1 ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven 2. Klasse k_1 und k_2 mit den beziehungsweisen Tangenten t_1 und t_2, so gibt es eine einzige Kurve 2. Klasse o_n, welche k_1 in T_1 oskuliert und eine gegebene Kurve k_n der Schar $(k_1\, k_2)$ doppelt berührt. Der bei veränderlichem k_n konstante Berührungspol M_1 ist der Pol von t_1, bezüglich k_2. Die Kegelschnitte o_n bilden eine Oskulationsschar. Der 4. Grundstrahl t ist die 2. Tangente durch den 2. Schnittpunkt T_2 von t_1 und k_2 an k_1. Die Schar $(k_1\, k_2)$ enthält zwei Kegelschnitte, welche durch M_1 gehen und daher von je einem Kegelschnitt o in M_1 superoskuliert werden.

Auf die Formulierung des dualen Satzes wird verzichtet.

Reguläre Punkte der Evolute, ihre Doppel- und Rückkehrpunkte.

Die Transformation $\mathfrak{T}$ führt k_1 in die Evolute $k_1{}^*$, jeden Klassenkegelschnitt, welcher die drei Seiten des Hauptdreiseits a, b, c berührt und außerdem

α) k_1 einfach berührt, über in ein Strahlbüschel, welches $k_1{}^*$ einfach berührt, dessen Träger also ein regulärer Punkt von $k_1{}^*$ ist und umgekehrt.

β) k_1 doppelt berührt, über in ein Strahlbüschel, welches $k_1{}^*$ doppelt berührt, dessen Träger also ein Doppelpunkt von $k_1{}^*$ ist und umgekehrt. Die beiden Doppelberührungstangenten gehen in zwei Tangenten im Doppelpunkt über[3].

γ) k_1 oskuliert, über in ein Strahlbüschel, dessen Träger aus Symmetriegründen ein Rückkehrpunkt von $k_1{}^*$ ist.

Fall α.

Alle Strahlbüschel, deren Träger auf einer gegebenen Geraden g^* liegen, werden durch $\mathfrak{T}$ in die Kegelschnitte einer Schar mit den Grundstrahlen a, b, c, g übergeführt. Auf g^* liegen so viele Punkte von $k_1{}^*$, als es Kegelschnitte dieser Schar gibt, welche k_1 berühren, also sechs. Ordnet man nämlich jeder Tangente von k_1 jene 3 anderen Tangenten zu, welche k_1 mit jenem Scharkegelschnitt gemeinsam hat, welcher diese Tangente berührt, so ist dadurch eine drei-drei-deutige Zuordnung auf dem rationalen Träger k_1 festgelegt, welche nach dem Chasles'schen

[3] *H. Durège* hat doppelberührende Kegelschnitte durch die Ecken des Hauptdreiecks an einen Kegelschnitt zur Konstruktion der Doppeltangenten einer rationalen c_4 verwendet. Sitzungsber. Akad. d. Wiss. Wien, II. Abt. Band 72, 1875, p. 1ff.

Korrespondenzprinzip 6 Doppelelemente besitzt. k_1^* *ist daher von 6. Ordnung.*

Fall β. Realitätsverhältnisse der Doppelpunkte.

Es gibt bekanntlich 4 Kegelschnitte, welche a, b, c zu Tangenten haben und k_1 doppelt berühren. Die 4 Berührungspole sind die 4 Schnittpunkte jener drei Paare zu je dreien durch einen Punkt gehenden Strahlen, welche von zwei Seiten des Dreiseits a, b, c und von k_1 harmonisch getrennt werden. Sind daher a, b, c reell, so erhält man nur in jener Ecke des Dreiseits reelle Strahlen dieser Art, aus welcher an k_1 konjugiert-komplexe Tangenten gehen. Es ist also dann kein Berührungspol reell, daher auch kein Doppelpunkt. Ist dagegen a reell, b und c konjugiert-komplex, also k_1 eine „Semi-Hyperbel"[4], so sind von den doppeltberührenden Kegelschnitten zwei reell, daher auch zwei Doppelpunkte (Abb. 1). Die vier Klassenkegelschnitte werden übrigens durch die harmonischen Kollineationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ untereinander vertauscht. Es berühren sich demnach zwei Paare in a, zwei in b und zwei in c. Jeder Doppelpunkt von k_1^* wird durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in die drei anderen Doppelpunkte transformiert, also bilden A, B, C das Diagonaldreieck des Doppelpunktvierecks.

Konstruktion der Doppelpunkte.

Polarisieren wir an k_1 (Transformation $\mathfrak{P}$), so sind jene vier Kegelschnitte zu finden, welche durch A, B, C gehen und k_1 doppelt berühren. Dies ist eine rein projektive Aufgabe, ihr Ergebnis folglich von jeder Metrik unabhängig. Wir dürfen demnach die vier Kegelschnitte auch mit euklidischen Hilfsmitteln konstruieren, wodurch eine einfachere Ausdrucksweise möglich ist.

Bedeutet L einen der Laguerre'schen Vertreter von B und C (Abb. 1), so führt eine perspektive (z. B. harmonische) Kollineation $\mathfrak{K}$ mit L als Zentrum und $a = BC$ als Gegenachse den Kegelschnitt k_1 in eine gleichseitige Hyperbel k_1' mit dem Mittelpunkt $A' = \mathfrak{K}\, A$, B und C in die absoluten Punkte der euklidischen Ebene, die gesuchten Kegelschnitte aber in euklidische Kreise durch A' über, welche k_1' doppelt berühren (Abb. 2). Schreibt man dem Kreis vom Mittelpunkt A' und durch die Brennpunkte F_1 und F_2 von k_1' ein regelmäßiges Sechseck $O'P'\overline{P'}\,\overline{O'}\,\overline{Q'}\,Q'$ so ein, daß O' und $\overline{O'}$ auf der Nebenachse von k_1' liegen, so besitzt eine mit k_1' koachsiale Hyperbel, welche $\overline{O'}\,P'$ in P' berührt, auf der Nebenachse eine Fokalinvolution, der O' und $\overline{O'}$ als Punktpaar angehören und die A' zum Zentralpunkt hat. $F_1\,F_2$ sind daher die Laguerre'schen Vertreter der konjugiert-komplexen Brennpunkte auf der Nebenachse, also die reellen Brennpunkte dieser Hyperbel. Der Durchmesser $A'\,P'$ schließt mit der Hauptachse 30^0 ein, der zur Tangente $O'\,P'$ parallele konjugierte Durchmesser mit

[4] Nach *Klein-Rosemann*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie (Berlin 1928), p. 229.

der Nebenachse ebenfalls 30°. Die Involution konjugierter Durchmesser dieser Hyperbel ist daher symmetrisch, die Hyperbel ist daher gleichseitig und mit k_1' identisch.

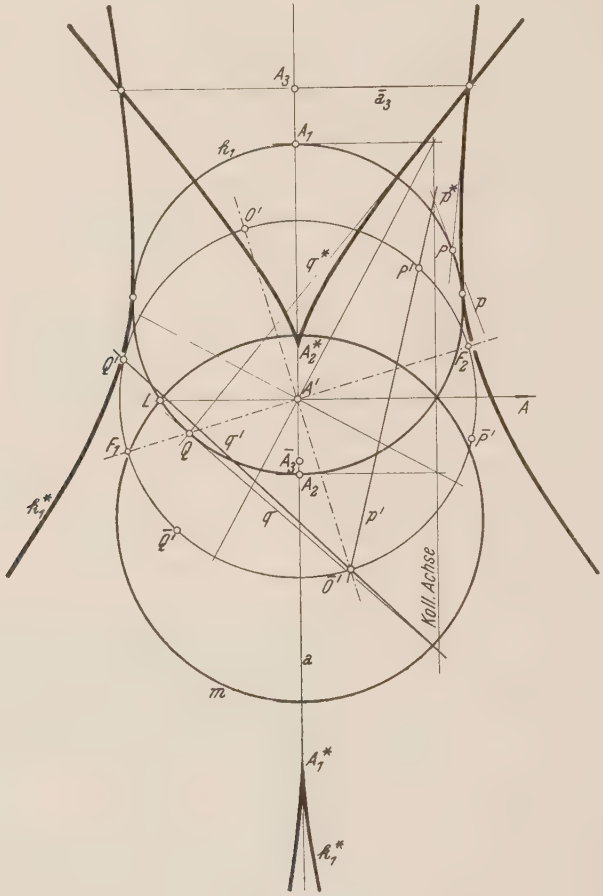


Abb. 1.

$\overline{O'}\ P'$ und $\overline{O'}\ Q'$ sind also die Tangenten durch $\overline{O'}$ an k_1', der Kreis d' vom Mittelpunkt O' und durch P', Q' geht daher durch A' und berührt k_1' doppelt, ebenso der Kreis $\overline{d'}$ vom Mittelpunkt $\overline{O'}$ und durch $\overline{P'}$, $\overline{Q'}$. Die anderen durch A' gehenden Kreise, welche k_1' doppelt berühren, sind konjugiert-komplex, ihre Berührungssehnen mit k_1' sind parallel zur Nebenachse im Abstande $\frac{ei}{2}$, wobei e die lineare Exzentrizität von k_1' bedeutet.

$\mathfrak{K}^{-1}\, d' = d$, $\mathfrak{K}^{-1}\, \overline{d'} = d$. $\mathfrak{P}\, d$ und $\mathfrak{P}\, \overline{d}$ sind dann zwei Klassenkegelschnitte, welche durch die Transformation $\mathfrak{T}$ in zwei Strahlbüschel übergehen, *deren*

Träger die reellen Doppelpunkte von k_1^* sind. Bezeichnen wir $\overline{O'}\,P' = p'$, $\overline{O'}\,Q' = q'$, $O'\,\overline{P'} = \bar{p}'$, $O'\,Q' = \bar{q}'$, und beachten wir, daß jede Tangente von $\mathfrak{P}\,d$, z. B. p und q, durch $\mathfrak{T}$ in einen Strahl durch den betreffenden Doppelpunkt von k_1^* übergeführt wird, so erkennen wir, daß dieser Doppelpunkt im Schnitt von p^* und q^* gelegen ist und p^* *und* q^* *zu Doppelpunktstangenten hat* (Abb. 1).

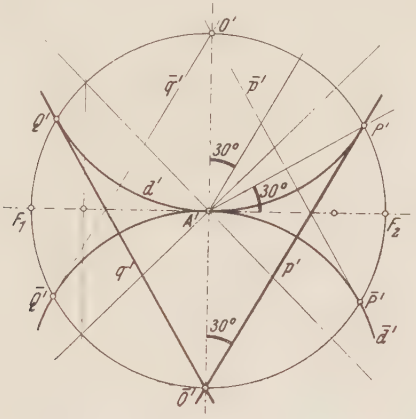


Abb. 2.

Fall γ.

Die sechs Kegelschnitte, welche a, b, c berühren und k_1 oskulieren[5], zerfallen in lauter Paare von Strahlbüscheln, deren Träger je aus einer Ecke des Hauptdreiseits und einem Schnittpunkt von k_1 mit der Gegenseite bestehen. Schneidet also k_1 etwa a in A_1 und A_2, so werden diese zwei Punkte als Träger von Strahlbüscheln durch $\mathfrak{T}$ wieder in zwei Strahlbüschel mit den Trägern $A_1^*\,A_2^*$ auf a übergeführt, welche die auf a liegenden Rückkehrpunkte der Evolute sind. $A_1^*\,A_2^*$ müssen zufolge der Autokollineation $\mathfrak{B}$ durch B, C harmonisch getrennt werden. Übrigens werden bekanntlich A_1 und A_1^*, ebenso A_2 und A_2^* durch die auf a liegenden Brennpunkte von k_1 harmonisch getrennt.

Analog sind $B_1^* = \mathfrak{T}\,B_1$, $B_2^* = \mathfrak{T}\,B_2$, $C_1^* = \mathfrak{T}\,C_1$, $C_2^* = \mathfrak{T}\,C_2$ die übrigen Rückkehrpunkte. Bilden a, b, c ein Dreiseit 1. Art, so sind vier Rückkehrpunkte reell, ist das Dreiseit 2. Art, so sind nur zwei reell.

Weitere harmonische Autokollineationen der Evolute[6].

Ordnet man in einer harmonischen Kollineation zwei Paare von Spitzen in folgender Weise zu: $A_1^* \leftrightarrow B_1^*$, $A_2^* \leftrightarrow B_2^*$, so ist dadurch

[5] Vgl. *H. Böheim*, Mh. Math. Phys. 22 (1911), 157—169.

[6] Auf diese Autokollineationen wurde ich von Herrn *W. Wunderlich*, Wien, aufmerksam gemacht.

das Zentrum C_3 auf c und die Achse c_3 durch C bestimmt. c_3 schneidet c in $\bar{C}_3$, wobei $(ABC_3\bar{C}_3) = -1$. Diese Kollineation besitzt a und b als entsprechende Gerade und führt die Evolute $k_1{}^*$ in eine Kurve 4. Klasse 6. Ordnung $\bar{k}_1{}^*$ über, welche in $A_1{}^*$, $A_2{}^*$, $B_1{}^*$, $B_2{}^*$ Rückkehrpunkte mit den gleichen Tangenten besitzt wie $k_1{}^*$. Da jede dieser Tangenten vier gemeinsame Tangenten von $k_1{}^*$ und $\bar{k}_1{}^*$ vorstellt, haben $k_1{}^*$ und $\bar{k}_1{}^*$ 16 Tangenten gemeinsam, zu welchen noch die 4 ebenfalls gemeinsamen Tangenten durch C_3 treten. $k_1{}^*$ und $\bar{k}_1{}^*$ müssen daher identisch sein, d. h. die harmonische Kollineation mit dem Zentrum C_3 und der Achse c_3 ist eine Autokollineation der Evolute. $C_1{}^*$ und $C_2{}^*$ müssen demnach durch C_3 und $\bar{C}_3$ harmonisch getrennt werden. *C_3 und $\bar{C}_3$ ist also jenes Punktpaar auf c, welches sowohl A, B als auch $C_1{}^*$ $C_2{}^*$ harmonisch trennt.* Es bestehen daher außer $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ noch folgende harmonischen Autokollineationen (zyklisch angeordnet):

$\mathfrak{C}_3)$ $A_1{}^* \leftrightarrow B_1{}^*$ $A_2{}^* \leftrightarrow B_2{}^*$ $C_1{}^* \leftrightarrow C_2{}^*$, Zentrum C_3 auf c, Achse $c_3 = C\,\bar{C}_3$.

$\mathfrak{A}_3)$ $B_1{}^* \leftrightarrow C_1{}^*$ $B_2{}^* \leftrightarrow C_2{}^*$ $A_1{}^* \leftrightarrow A_2{}^*$, „ A_3 „ a, „ $a_3 = A\,\bar{A}_3$.

$\mathfrak{B}_3)$ $C_1{}^* \leftrightarrow A_1{}^*$ $C_2{}^* \leftrightarrow A_2{}^*$ $B_1{}^* \leftrightarrow B_2{}^*$, „ B_3 „ b „ $b_3 = B\,\bar{B}_3$.

$\bar{\mathfrak{C}}_3)$ $A_1{}^* \leftrightarrow B_2{}^*$ $A_2{}^* \leftrightarrow B_1{}^*$ $C_1{}^* \leftrightarrow C_2{}^*$, „ $\bar{C}_3$ „ c „ $\bar{c}_3 = C\,C_3$.

$\bar{\mathfrak{A}}_3)$ $B_1{}^* \leftrightarrow C_2{}^*$ $B_2{}^* \leftrightarrow C_1{}^*$ $A_1{}^* \leftrightarrow A_2{}^*$, „ $\bar{A}_3$ „ a, „ $\bar{a}_3 = A\,A_3$.

$\bar{\mathfrak{B}}_3)$ $C_1{}^* \leftrightarrow A_2{}^*$ $C_2{}^* \leftrightarrow A_1{}^*$ $B_1{}^* \leftrightarrow B_2{}^*$, „ $\bar{B}_3$ „ b „ $\bar{b}_3 = B\,B_3$.

Von diesen 6 Kollineationen sind immer nur zwei, und zwar mit gleichen Buchstaben bezeichnete, reell, gleichgültig, ob *abc* ein Dreiseit 1. Art oder 2. Art ist. Je zwei Doppelpunkte der Evolute liegen entweder auf einem Kollineationsstrahl oder auf einer Kollineationsachse. In Abb. 2 sind A_3 und $\bar{A}_3$ reell, die in der Mitte zwischen A_3 und a_3 liegende Gegenachse von $\mathfrak{A}_3$ könnte zur Konstruktion der euklidischen Asymptoten verwendet werden.

Besondere reguläre Punkte und Tangenten der Evolute.

Rückt $\mathfrak{T}_1$ in einen Schnittpunkt von k_1 und m, so ist $k_2 = m$. Die Tangente in T_1 an m ist jetzt Evolutentangente, ihr Berührungspunkt ist der absolute Pol von t_1. Der Krümmungskreis zerfällt in das Punktpaar T_1 T_2, wobei T_2 den 2. Schnittpunkt von t_1 und m bedeutet. Als Punktort zerfällt er in die doppelt zu zählende Gerade t_1. Rückt in dualer Auffassung t_1 in eine gemeinsame Tangente von k_1 und m, so ist sie selbst Evolutentangente, $k_2 = k_1$, $M_1 = T_1$, der Krümmungskreis

zerfällt als Punktort in t_1 und die 2. Tangente durch T_1 an m, als Linienort in das doppelt zu zählende Strahlbüschel T_1. *Die Evolute berührt daher k_1 in den Berührungspunkten der vier gemeinsamen Tangenten von k_1 und m.* Die sechs Brennpunkte von k_1 sind also auch Brennpunkte von $k_1{}^*$, deren es im ganzen $\binom{8}{2} = 28$ gibt, von welchen u. a. je vier auf einer Achse von k_1 liegen.

Weitere Eigenschaften der Evolute.

Die Dualkurve zu $k_1{}^*$ ist der Ort aller Punkte, welche zu den Punkten von k_1 bezüglich k_1 und m doppelt konjugiert sind, also eine Kurve 4. Ordnung 6. Klasse, welche in A, B, C die Dualsingularitäten zu den zweifachen Rückkehrtangenten a, b, c besitzt, nämlich Inflexionsknoten (Projektive Lemniskate). Eine solche rationale Kurve hat die Eigenschaft[7], daß die Berührungspunkte der 6 aus einem beliebigen Punkte P gezogenen Tangenten auf einem Kegelschnitt liegen. Ist P ein Kurvenpunkt, so liegen die Berührungspunkte der 4 aus P möglichen Tangenten auf einer Geraden[7]. *Dual dazu hat daher die Kegelschnittsevolute die Eigenschaft, daß die Tangenten in den 6 Schnittpunkten einer beliebigen Geraden einen Kegelschnitt berühren. Ferner schneidet eine beliebige Tangente der Evolute diese noch in 4 Punkten, deren Tangenten durch einen Punkt gehen.*

Besondere Lage von k_1 und m.

1. *Einfache Berührung von k_1 und m* (Fall der hyperbolischen Parabel)[4].

k_1 berühre m in $a = b$, zwei zusammenfallenden Seiten des Hauptdreiseits; c geht durch $A = B = C_2$. Der dritte Eckpunkt C des Hauptdreiseits liegt auf $a = b$ und ist der Schnittpunkt von a mit der nicht durch A gehenden gemeinsamen Sehne von k_1 und m. C ist als Schnittpunkt von a und b anzusehen. Der Tangente a von k_1 sind alle Strahlen durch A doppelt konjugiert, der irreduzible Rest der Evolute ist daher *eine Kurve 3. Klasse 3. Ordnung mit dem Rückkehrpunkt $C_1{}^*$ und der Rückkehrtangente c*, also auf Grund der Plücker'schen Formeln mit einer Wendetangente (Analogie mit der Neil'schen Parabel). $\mathfrak{T}$ transformiert jedes Strahlbüschel in einen Klassenkegelschnitt, welcher $a = b$ in C und außerdem c berührt. Unter den Kegelschnitten dieses Gewebes sind nur zwei, welche k_1 oskulieren, nämlich die aus den Strahlbüschelpaaren mit den Trägern C, A und $C\,C_1$ bestehenden. Letzteres

[7] Vgl. Enzykl. d. math. Wiss. III C 5, p. 563.

geht durch $\mathfrak{T}$ in den einzigen Rückkehrpunkt C_1^* über, ersteres daher *in den einzigen Wendepunkt, nämlich in A mit der Wendetangente a.*

2. *Oskulation von k_1 und m* (Fall der oskulierenden Parabel)[4].

$a = b = c$, $A = B = C$. k_1 und m berühren einander noch in einer zweiten, zur früheren benachbarten Tangente, daher spaltet sich auch das Strahlbüschel durch diesen zweiten Berührungspunkt ab, der irreduzible Rest der Evolute ist daher *ein Kegelschnitt*, welcher, wie im allgemeinen Falle, k_1 in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten von k_1 und m berührt, also in A und im Berührungspunkte U der vierten gemeinsamen Tangente u von k_1 und m, *sie ist daher eine hyperbolische Parabel*[4]. $\mathfrak{T}$ transformiert alle Strahlbüschel in ein Gewebe von Kegelschnitten, welche sich in a, bzw. A oskulieren. Weder k_1 noch m gehören diesem Gewebe an. Auch hier kommt in der Schar $(k_1\, m)$ ein Punktpaar vor, nämlich A und der Schnittpunkt $\bar{A}$ von u mit a. Verbindet man den Berührungspunkt T_1 einer beliebigen Tangente t_1 von k_1 mit dem Pol von t_1 bezüglich des Punktpaares $A\,\bar{A}$, so erhält man eine Tangente t_1^* der Evolute k_1^*, welche somit *das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen ist*, deren eine auf k_1, die andere auf a liegt. A entspricht sich selbst, wodurch eben die Klasse des Erzeugnisses auf 2 reduziert wird. k_1^* ist durch die Tangenten a, u, ihre beziehungsweisen Berührungspunkte A, U, sowie durch eine weitere Tangente t_1^* vollkommen bestimmt. Verwendet man $A\,(0, 1, 0)$ $\bar{A}\,(1, 0, 0)$ und $U\,(0, 0, 1)$ als Ecken des Koordinatendreiecks eines projektiven Koordinatensystems mit den Koordinatensymbolen u_1, u_2, u_3, so hat k_1 die Gleichung $k_1 \equiv u_1^2 + \lambda u_2 u_3 = 0$. $\mathfrak{T}$ besitzt die Transformationsgleichungen

$$\sigma u_1' = -\lambda u_1 u_2,\quad \sigma u_2' = \lambda u_2^2,\quad \sigma u_3' = -\lambda u_2 u_3 + 2 u_1^2.$$

Der irreduzible Teil der Evolute von k_1 hat dann die Gleichung $k_1^* \equiv 3 u_1^2 - \lambda u_2 u_3 = 0$, ist also wegen $k_1^* + k_1 = 4 u_1^2$ und $k^*{}_1 - k_1 = -2\,.\,(u^2{}_1 - \lambda u_2 u_3)$ der harmonische Kegelschnitt zu k_1 in Bezug auf $u_1^2 = 0$ und $\bar{k}_1 \equiv u_1^2 - \lambda u_2 u_3 = 0$. $\bar{k}_1$ ist der harmonische Kegelschnitt zu k_1 in Bezug auf $u_1^2 = 0$ und $u_2 u_3 = 0$ und zugleich die Transformierte von k_1 in der perspektiven Kollineation mit dem Zentrum $\bar{A}$, der Achse (A, U) und der Charakteristik i. Die Gleichungen $k_1 = 0$ und $k_1^* = 0$ zeigen, daß k_1 und k_1^* entsprechende Elemente der Projektivität $\lambda + 3\lambda^* = 0$ in der Schar $(u_1^2, u_2 u_3)$ sind, deren Doppelelemente $u_1^2 = 0$ und $u_2 u_3 = 0$ sind, somit jene (ausgearteten)

Kegelschnitte der Schar darstellen, welche mit ihren Evoluten zusammenfallen[8].

3. *Doppelberührung von k_1 und m in den 2 Tangenten p, q mit den, bzw. Berührungspunkten P, Q* (Fall des Kreises, bzw. der Abstandslinie).

Hier besteht eine harmonische Kollineation mit dem Berührungspol M als Zentrum, welche k_1 und m in sich überführt. Sind t und $\bar{t}$ zwei entsprechende Tangenten von k_1 mit den bzw. Berührungspunkten T und $\overline{T}$, so transformiert $\mathfrak{T}$ sowohl t als auch $\bar{t}$ in den Strahl $MT = M\overline{T}$, da die absoluten Pole von t und $\bar{t}$ auf MT liegen. Das Strahlbüschel M gehört also zweifach der Evolute an, außerdem noch einfach die Strahlbüschel P und Q. Die Evolute zerfällt daher vollständig (Analogie zum Kreis der euklidischen Metrik).

4. *Superoskulation von k_1 und m in P* (Fall des Grenzkreises).

Dieser Fall kann als Sonderfall von 3 betrachtet werden, da P und Q zusammengerückt sind. Die Evolute besteht aus dem vierfach zählenden Strahlbüschel P.

[8] Läßt man auch komplexe Kegelschnitte zu, so ist das Analogon in euklidischer Metrik zu Fall 2 eine komplexe Parabel, welche die Ferngerade der euklidischen Ebene in einem ihrer absoluten Punkte berührt. Auch diese Parabel besitzt als Evolute eine Kurve 2. Klasse, nämlich eine komplexe Parabel mit dem gleichen Fernpunkt und dem Brennpunkt im anderen absoluten Punkt. Darauf wurde ich von Herrn *F. Hohenberg*, Graz, aufmerksam gemacht.

Logarithmische Spiralen im komplexen Gebiet.

Von

Fritz Hohenberg, Graz.

(Eingelangt am 24. Juni 1950.)

Ein komplexer Punkt der euklidischen Ebene wird nach *Laguerre*[1] veranschaulicht, indem man ihm das geordnete Paar der reellen Punkte seiner Verbindungsgeraden mit den absoluten Kreispunkten zuordnet. Nach *Study*[2] bestimmen dann die Bildpunktepaare der (reellen und komplexen) Punkte einer analytischen Kurve eine uneigentlich-konforme Verwandtschaft. Ist die analytische Kurve reell, gestattet sie also das Konjugium, so ist die Bildverwandtschaft involutorisch[3]; man nennt sie die *Schwarzsche Spiegelung* an der reellen Kurve[4].

Es sollen hier die reellen und die komplexen logarithmischen Spiralen untersucht werden, d. h. die Kurven, die die Geraden eines Büschels (mit i. a. komplexem Träger) unter gegebenem (i. a. komplexen) Winkel schneiden. Sie sind Bahnkurven einer eingliedrigen Gruppe von Drehstreckungen im komplexen Gebiet, daher ist diese Untersuchung ein Beitrag zur Kenntnis der Hauptgruppe im komplexen Gebiet.

Als Vorbereitung werden Polarkoordinaten im komplexen Gebiet betrachtet.

1. Polarkoordinaten im komplexen Gebiet.

In der Ebene seien Polarkoordinaten r und φ eingeführt. Der Pol $O\,(r = 0)$ sei zunächst ein reeller Punkt, die Polarachse eine reelle Gerade durch O. Für einen komplexen Punkt P setzen wir

$$r = R\,e^{i\varrho},\ \varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2 \quad (R, \varrho, \varphi_1, \varphi_2 \text{ reell}) \tag{1}$$

[1] *Laguerre*, Werke, Bd. II, Paris 1905, S. 88—108.

[2] *E. Study*, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie I, Teubner 1911, S. 48.

[3] Siehe z. B. *E. Study*, l. c., S. 88.

[4] *H. A. Schwarz*, Ges. Abh. I, S. 12; II, S. 66, 106, 151.

P wird nach *Laguerre* und *Study* mit den absoluten Kreispunkten verbunden. Die reellen Punkte P_1 und P_2 der Verbindungsgeraden sind die reellen Bildpunkte von P. Sie mögen die Polarkoordinaten R_1, Φ_1 und R_2, Φ_2 haben. Aus $(r \sin\varphi - R_\nu \sin\Phi_\nu) : (r\cos\varphi - R_\nu \cos\Phi_\nu) = (-1)^{\nu-1} i$ $(\nu = 1, 2)$ folgt

$$R = \sqrt{R_1 R_2},\ \varrho = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2);\ \varphi_1 = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2),\ \varphi_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{2}$$

$$r = \sqrt{R_1 R_2}\, e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)},\quad \varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2). \tag{3}$$

Faßt man die Felder der Punkte P_1 und P_2 als *Gauß*sche Zahlenebenen auf, indem man die komplexe Veränderlichen

$$Z_1 = R_1 e^{i\Phi_1},\ Z_2 = R_2 e^{i\Phi_2} \tag{4}$$

einführt, so folgt

$$r = \sqrt{Z_1 \overline{Z}_2},\ \varphi = \frac{1}{2i}\ln\frac{Z_1}{\overline{Z}_2};\ Z_1 = r e^{i\varphi},\ \overline{Z}_2 = r e^{-i\varphi}. \tag{5}$$

Sind z_1 und z_2 die kartesischen Koordinaten von P, so ist[5]

$$Z_1 = z_1 + i z_2,\ \overline{Z}_2 = z_1 - i z_2;\ z_1 = \frac{1}{2}(Z_1 + \overline{Z}_2),\ z_2 = \frac{1}{2i}(Z_1 - \overline{Z}_2). \tag{6}$$

Eine analytische Kurve $F(r, \varphi) = 0$ ergibt die uneigentlich-konforme Verwandtschaft

$$F\left(\sqrt{Z_1 \overline{Z}_2},\ \frac{1}{2i}\ln\frac{Z_1}{\overline{Z}_2}\right) = 0 \tag{7}$$

zwischen den ersten und zweiten Bildpunkten.

Soll ein eigentlicher komplexer Punkt O zum Ursprung von Polarkoordinaten gemacht werden, so wähle man als Polarachse a die reelle Verbindungsgerade von O mit dem konjugiert komplexen Punkt $\overline{O}$. O_1 und O_2 seien die reellen Bildpunkte von O, a_1 und a_2 die Parallelen zu a durch O_1, bzw. O_2. Dann gelten alle Formeln unverändert, wenn man $\overline{O_i P_i} = R_i$ und $\sphericalangle (a_i, O_i, P_i) = \Phi_i$ setzt, d. h. wenn man das erste, bzw. zweite Bildfeld mit Polarkoordinaten ausmißt, deren Pol in O_1, bzw. O_2 liegt und deren reelle Polarachsen zueinander parallel sind. Anders ausgedrückt: der Übergang von einem Polarkoordinatensystem

[5] *E. Study*, l. c., S. 10.

mit reellem Pol zu einem solchen mit komplexen Pol bedeutet nur, daß auf die Bildfelder je eine reelle Parallelverschiebung ausgeübt wird. Daher wird im folgenden O als reeller Punkt und a als reelle Gerade durch O vorausgesetzt.

2. Komplexe logarithmische Spiralen.

„Spirale" bedeute hier stets eine reelle oder komplexe logarithmische Spirale l mit dem Pol O. In der Gleichung

$$r = c\, e^{k\varphi} \tag{8}$$

von l seien c und k komplexe Konstanten, $c = C\, e^{i\gamma}$, $k = k_1 + i\, k_2$ (C, γ, k_1, k_2 reell). In kartesischen Koordinaten z_1, z_2 lautet (8) wegen $z_1 = r\cos\varphi$, $z_2 = r\sin\varphi$

$$(z_1 + i\, z_2)^{\frac{1+ki}{2}} \quad (z_1 - i\, z_2)^{\frac{1-ki}{2}} = c. \tag{9}$$

Dies ergibt nach (6) die Bildverwandtschaft

$$Z_1^{\frac{1+ki}{2}} \quad \overline{Z}_2^{\frac{1-ki}{2}} = c. \tag{10}$$

Man gelangt zu deren reellem Ausdruck, wenn man in (8) Betrag und Amplitude trennt, also

$$R = C\, e^{k_1\varphi_1 - k_2\varphi_2}, \quad \varrho = \gamma + k_2\varphi_1 + k_1\varphi_2 + 2n\pi \ (n \text{ ganze Zahl}), \tag{11}$$

und hier nach (2) die Bildpunktkoordinaten einführt,

$$R_1^{1-k_2}\, R_2^{1+k_2} = C^2\, e^{k_1(\Phi_1+\Phi_2)}$$

$$R_1^{k_1}\, e^{(1-k_2)[\Phi_1-(\gamma+2n\pi)]} = R_2^{k_1}\, e^{(1+k_2)[\Phi_2+(\gamma+2n\pi)]}. \tag{12}$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach (R_1, Φ_1), bzw. (R_2, Φ_2)

$$\left\{\begin{array}{l} R_1^{k_1^2+(1-k_2)^2} \quad C^{2(1-k_2)}\, R_2^{k_1^2+k_2^2-1}\, e^{2k_1(\Phi_2+\gamma+2n\pi)} \\ [k_1^2+(1-k_2)^2]\,\Phi_1 = 2k_1(\ln R_2 - \ln C) - (k_1^2+k_2^2-1)\,\Phi_2 + 2(1-k_2)(\gamma+2n\pi) \end{array}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_2^{k_1^2+(1+k_2)^2} \quad C^{2(1+k_2)}\, R_1^{k_1^2+k_2^2-1}\, e^{2k_1(\Phi_1-\gamma-2n\pi)} \\ [k_1^2+(1+k_2)^2]\,\Phi_2 = 2k_1(\ln R_1 - \ln C) - (k_1^2+k_2^2-1)\,\Phi_1 - 2(1+k_2)(\gamma+2n\pi). \end{array}\right. \tag{14}$$

Einem Punkt $P_1\,(R_1, \Phi_1)$ entspricht eine (unendliche) Punktfolge $P_{2n}\,(R_2, \Phi_2)$, einem Punkt $P_2\,(R_2, \Phi_2)$ ebenso eine Punktfolge $P_{1n}\,(R_1, \Phi_1)$. $P_{\nu,n+1}$ $(\nu = 1, 2)$ geht aus $P_{\nu,n}$ hervor, indem man $P_{\nu,n}$ einer Streckung aus O im Verhältnis m_ν und einer Drehung um O durch μ_ν (Bogenmaß) unterwirft. Dabei ist

$$\ln m_\nu = \frac{4\,\varepsilon_\nu\,k_1\,\pi}{k_1^2+(1-\varepsilon_\nu\,k_2)^2},\quad \mu_\nu = \frac{4\,\varepsilon_\nu\,\pi\,(1-\varepsilon_\nu\,k_2)}{k_1^2+(1-\varepsilon_\nu\,k_2)^2},\quad \varepsilon_\nu = (-1)^{\nu-1},\ (\nu = 1,2). \tag{15}$$

Die erste Gleichung (12) stellt übrigens bei festem P_1 (oder P_2) eine von abzählbar unendlich vielen reellen Spiralen dar, auf denen die Punkte $P_{2\,n}$ (oder $P_{1\,n}$) liegen.

Für $R_1 = R_2, \Phi_1 = \Phi_2$ folgen aus (12) die Festpunkte der Bildverwandtschaft, d. h. die *reellen Punkte der Spirale l*. Es ergibt sich für $k_2 \neq 0$ die Punktfolge

$$R_1 = R_2 = C\,e^{k_1\,\Phi_1},\ \Phi_1 = \Phi_2 = -\frac{\gamma + 2\,n\pi}{k_2}. \tag{16}$$

Ist jedoch $k_2 = 0$ und γ kein Vielfaches von π, so existiert im Endlichen kein Festpunkt außer O. Ist ferner $k_2 = 0$ und c reell, so ist l reell und jeder ihrer reellen Punkte ist Festpunkt der Bildverwandtschaft. In allen drei Fällen liegen die reellen Punkte von l auf der Spirale

$$r = C\,e^{k_1\,\varphi}. \tag{17}$$

In der Bildverwandtschaft entspricht einer reellen Spirale

$$R_1 = S_1\,e^{s_1\,\Phi_1} \tag{18a}$$

eine Folge untereinander kongruenter reeller Spiralen

$$R_2 = S_{2\,n}\,e^{s_2\,\Phi_2}. \tag{18b}$$

Setzt man $s_\nu = \operatorname{tg}\sigma_\nu$ $(\nu = 1, 2)$, so sind σ_ν die Winkel, unter denen diese Spiralen die Kreise um O schneiden. In entsprechenden Punkten P_1 und $P_{2\,n}$ bilden die Tangenten entsprechender Spiralen (18a, b) zwei ungleichsinnig kongruente Strahlbüschel, es ist

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\,(\sigma_1+\sigma_2) = \operatorname{arc\,tg}\,\frac{k_1^2+k_2^2-1 \pm \sqrt{(k_1^2+k_2^2-1)^2+4\,k_1^2}}{2\,k_1}. \tag{19}$$

Die beiden Werte σ_0 unterscheiden sich um $\pi/2$. Spiralen mit dem „Steigwinkel" σ_0 gehen in kongruente über. Man kann dies benützen, um die einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte $P_{2\,n}$ festzulegen: enthält die Spirale l wenigstens einen von O verschiedenen reellen Punkt Q, so ermittle man zwei der durch P_1 und Q gehenden reellen Spiralen. Mittels (19) erhält man die entsprechenden reellen Spiralen durch Q, ihre weiteren Schnittpunkte sind die Punkte $P_{2\,n}$.

Das *Ähnlichkeitsverhältnis* der Bildverwandtschaft ist

$$\left|\frac{d\,\overline{Z}_2}{d\,Z_1}\right| = \left|-\frac{1+k\,i}{1-k\,i}\cdot\frac{\overline{Z}_2}{Z_1}\right| = \sqrt{\frac{k_1^2+(1-k_2)^2}{k_1^2+(1+k_2)^2}}\cdot\frac{R_2}{R_1}. \tag{20}$$

Die Tangenten von l haben i. a. komplexe Richtung. Unter den ∞^2 komplexen Punkten von l haben jedoch jene ∞^1 Punkte eine *reelle Tangentenrichtung*, für die

$$Th\,2\,\varphi_2 = \frac{2\,k_2}{k_1^2+k_2^2+1} \tag{21}$$

ist. Dies gilt für jeden Wert φ_1 und unabhängig von γ.

Die Spirale l hat im Punkte (r_0, φ_0) den Krümmungsradius $\sqrt{1+k^2}\,.\,r_0$ und den Krümmungsmittelpunkt $(k\,r_0;\ \varphi_0+\frac{\pi}{2})$. Der i. a. komplexe Krümmungskreis wird durch die uneigentlich-konforme Kreisverwandtschaft

$$Z_1\,\overline{Z}_2 + k\,r_0\,i\,(e^{-i\varphi_0}Z_1 - e^{i\varphi_0}\overline{Z}_2) - r_0^2 = 0 \tag{22}$$

dargestellt. *In der Kreisverwandtschaft* (22) *entsprechen einander die Krümmungskreise der Spiralen* (18a, b) *in den reellen Bildpunkten von* (r_0, φ_0). In diesem Sinne wird die Bildverwandtschaft (12) im Punktepaar, das zu (r_0, φ_0) gehört, durch die Kreisverwandtschaft (22) angenähert.

Man kann einen Schritt weiter gehen und eine beliebige analytische Kurve $\mathfrak{L}$ in einem (reellen oder komplexen) Punkt P durch eine logarithmische Spirale l annähern, die in P denselben Krümmungsmittelpunkt K_P und dieselbe Ableitung des Krümmungsradius nach der Bogenlänge besitzt: der Pol O von l liegt zunächst auf dem Kreis über P und K_P (weil $\sphericalangle\, P\,O\,K_P = 90^0$); ferner ist die gegebene Ableitung des Krümmungsradius nach der Bogenlänge gleich der „Steigung" k von l, dadurch ist der Winkel zwischen $[O\,P]$ und der Tangente an l in P gegeben. Damit ist O bestimmt. *Es folgt, daß sich jede uneigentlich-konforme Punktverwandtschaft in der Umgebung eines Punktepaares durch die Bildverwandtschaft einer i. a. komplexen logarithmischen Spirale annähern läßt.*

3. Die komplexen Punkte reeller logarithmischer Spiralen.

Bei einer reellen Spirale l ist $k_2 = \gamma = 0$, also $r = C\,e^{k_1\varphi}$. Die Bildverwandtschaft ist hier die *Schwarzsche Spiegelung* an l, nach (12) also

$$R_1\,R_2 = C^2\,e^{k_1(\Phi_1+\Phi_2)},\ R_1^{k_1}\,e^{\Phi_1} - 2n\pi = R_2^{k_1}\,e^{\Phi_2+2n\pi}. \tag{23}$$

Man erhält die einem Punkt $P_1\,(R_1, \Phi_1)$ zugeordneten Punkte $P_{2\,n}\,(R_2, \Phi_2)$ durch die folgende Konstruktion[6]: man legt durch P_1 jene (eindeutig bestimmte) Spirale l', die l orthogonal schneidet. Ist dann (R, Φ) einer der abzählbar unendlich vielen Schnittpunkte von l und l', so folgt daraus ein Punkt $P_{2\,n}\,(R_2, \Phi_2)$ mittels der Beziehungen $R_1 R_2 = R^2$, $\Phi_1 + \Phi_2 = 2\,\Phi$.

Den reellen Spiralen, die durch P_1 gehen, entsprechen die durch $P_{2\,n}$ gehenden Spiralen. *Entsprechende Spiralen schneiden l wegen* (19) *unter entgegengesetzt gleichem Winkel, insbesondere gehen die l orthogonal schneidenden Spiralen in sich über. Ferner entsprechen einander jene zu l kongruenten Spiralen, die aus l durch Drehung um O durch entgegengesetzt gleiche Winkel hervorgehen.*

4. Zwei weitere Sonderfälle.

a) $k_1^2 + k_2^2 - 1 = 0$. Hier lauten (13) und (14)

$$R_1^{1-k_2} = C^{1-k_2}\, e^{k_1(\Phi_2+\gamma+2n\pi)},\ (1-k_2)\,\Phi_1 = k_1(\ln R_2 - \ln C) + (\gamma + 2n\pi),$$
$$R_2^{1+k_2} = C^{1+k_2}\, e^{k_1(\Phi_1-\gamma-2n\pi)},\ (1+k_2)\,\Phi_2 = k_1(\ln R_1 - \ln C) - (\gamma + 2n\pi). \tag{24}$$

Den Kreisen um O entsprechen die Geraden aus O und umgekehrt. Wegen $\operatorname{tg}\sigma_0 = \pm 1$ schneiden entsprechende reelle Spiralen in beiden Bildfeldern die Spiralen mit den Steigwinkeln $\pm 45^0$ unter entgegengesetzt gleichen Winkeln.

b) $k_1 = 0$. Hier lautet (12)

$$R_1^{1-k_2}\, R_2^{1+k_2} = C^2,\ (1 - k_2)\,(\Phi_1 - \gamma - 2n\pi) - (1 + k_2)\,(\Phi_2 + \gamma + 2n\pi). \tag{25}$$

Die Kreise um O und die Geraden aus O werden je untereinander transformiert. Entsprechende reelle Spiralen in beiden Bildfeldern schneiden die Kreise um O unter entgegengesetzt gleichen Winkeln.

Für rationales k_2 ergeben sich algebraische, u. zw. rationale logarithmische Spiralen

$$(z_1 + i\,z_2)^{\frac{1-k_2}{2}}\ (z_1 - i\,z_2)^{\frac{1+k_2}{2}} = c. \tag{26}$$

Zu ihnen gehören algebraische uneigentlich-konforme Bildverwandtschaften

$$Z_1^{\frac{1-k_2}{2}}\ \overline{Z}_2^{\frac{1+k_2}{2}} = c. \tag{27}$$

[6] Die Konstruktion entsprechender Punkte bei der Inversion an einem Kreis oder bei der Spiegelung an einer Geraden sind Sonderfälle dieser Konstruktion.

Z. B. ergibt $k_2 = 0$ den Kreis um O mit dem Radius c. $k_2 = \infty$ ergibt eine durch O gehende Gerade. Für $k_2 = 2$ ergibt sich eine Kurve 3. Ordnung mit dem Wendepunkt O (die Wendetangente geht durch den einen Kreispunkt $\mathfrak{J}$) und einer Spitze im anderen Kreispunkt (Spitzentangente ist die Ferngerade). Für $k_2 = -2$ oder $= \pm \frac{1}{3}$ oder $= \pm 5$ ergeben sich ebenfalls Kurven 3. Ordnung mit Spitze. Für $k_2 = 3$ ergibt sich eine Parabel mit dem Fernpunkt $\overline{\mathfrak{J}}$, die in O die Gerade $[O\,\mathfrak{J}]$ berührt usw.

5. Beziehungen zur Mercator-Seekarte.

Durch stereographische Projektion auf eine Kugel, die die Ebene der logarithmischen Spirale l in deren Pol O berührt, geht l in eine Kugelloxodrome über. Bei der Abbildung der Kugel auf eine Mercator-Seekarte geht die Kugelloxodrome in eine gerade Linie über. Genauer ausgedrückt, sie erscheint im Marcatorbild als eine Folge gleichgeneigter Strecken zwischen den beiden parallelen Kartenrändern, wobei der Anfangspunkt jeder Strecke am linken Kartenrand in derselben Höhe liegt wie der Endpunkt der vorhergehenden Strecke am rechten Kartenrand. In anderer Auffassung kann man die Karte auch unendlich oft nebeneinander auflegen, so daß einem Punkt in der Ebene der Spirale abzählbar unendlich viele „äquivalente" Punkte im Kartenbild entsprechen, die alle in derselben Höhe liegen und im Abstand der Kartenbreite aufeinanderfolgen. Einer logarithmischen Spirale mit dem Pol O entspricht dann im Mercatorbild eine Folge von abzählbar unendlich vielen äquivalenten Geraden.

Die in 1. bis 4. verwendete reelle Darstellung komplexer Punkte ist mit den komplexen Punkten konform-kovariant verbunden. Die Bildpunktepaare von l bilden sich daher auf die Bildpunktepaare jeder der untereinander äquivalenten Geraden ab, die l entsprechen. Bei der Abbildung auf die Mercatorkarte bleiben Winkelbeziehungen erhalten, z. B. (19) und die zweite Gleichung (25), Streckenbeziehungen gehen verloren.

Der Schwarzschen Spiegelung an einer reellen Spirale l entspricht im Mercatorbild die Gesamtheit der gewöhnlichen Spiegelungen an den Geraden, die l entsprechen. Der Bildverwandtschaft einer komplexen Spirale entspricht im Mercatorbild eine Folge von abzählbar unendlich vielen ungleichsinnigen Ähnlichkeiten, wobei einer Geraden eine Folge äquivalenter Geraden zugeordnet wird.

Man kann so einige frühere Ergebnisse anschaulich verfolgen. Z. B. läßt sich leicht die Folge der Bildpunkte $P_{2\,n}$ eines Punktes P_1 überblicken, ebenso die Folge reeller Spiralen, auf denen die Punkte $P_{2\,n}$ liegen. Durchläuft P_1 eine reelle Gerade im Mercatorbild, so durchlaufen die Punkte $P_{2\,n}$ eine Folge äquidistanter Geraden. Ihnen entsprechen in der Ebene der Spirale die reellen Spiralen (18a, b). Auch die isogonalen Trajektorien der durch einen Punkt laufenden logarithmischen Spiralen mit dem Pol O werden in ebensolche Kurven übergeführt: denn ihnen entsprechen im Mercatorbild logarithmische Spiralen, die ja durch eine ungleichsinnige Ähnlichkeit in ebensolche übergeführt werden.

Sätze über Primzahlen.

Von

Walter Knödel, Wien.

(Eingelangt am 30. Juni 1950.)

Einleitung.

1949 habe ich auf elementarem Weg bewiesen[1]: „Durchläuft man die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, ..., y, ..., so gibt es immer wieder ein y_0, zu dem unendlich viele Primzahlen p, p' mit der Differenz y_0 gehören". Gleichzeitig konnte ich untere Schranken für die Anzahl der y_0 und für die Anzahl der zugehörigen Primzahlpaare angeben. Es erhob sich die Frage: Ist die dazu entwickelte Beweismethode verallgemeinerungsfähig auf den Fall von k Primzahlen mit vorgegebenen Abständen? Diese Frage wird in der vorliegenden Arbeit bejaht und es wird *Satz 1* gezeigt:

Es gibt mindestens $c_1 \cdot c_{29}(\varkappa) \dfrac{\log^{\varkappa-1} x}{\log_3^{\varkappa} x}$ *k-tupel von natürlichen Zahlen*

$$y_1 = 0, \quad y_i < 2 \log x \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

mit der Eigenschaft, daß zu jedem k-tupel mindestens $c_2 \cdot c_{22}(\varkappa) \dfrac{x}{\log^{\varkappa} x}$ *natürliche Zahlen* $z < x$ *gehören, für die das k-tupel*

$$z + y_i \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

aus lauter Primzahlen besteht.

Dabei bedeuten die c_i Konstante, die $c_j(t)$ Funktionen von t allein, und $\log_r x$ den r-fach iterierten Logarithmus von x. Ferner ist $k \equiv \varkappa$.

Um die oben erwähnten Methoden anwenden zu können, muß ich in Kapitel 1 folgenden Satz 2 beweisen:

---

[1] Anzeiger zu den Sitzungsberichten der österr. Akad. der Wissenschaften, math. naturw. Klasse, 1949/5/112—116.

Zu jedem k-tupel von natürlichen Zahlen y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gibt es höchstens $c_3 \cdot c_4(\varkappa) \cdot C_5(\varkappa; y_1 \ldots y_\varkappa) \cdot \frac{x}{\log^\varkappa x}$ natürliche Zahlen $z < x$, für die das k-tupel $z + y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ aus lauter Primzahlen besteht.

Für $k = 2$ geht diese Aussage in einen Satz von *Schnirelmann* über und ich habe mich beim Beweis des allgemeinen Satzes so eng als möglich an dem Beweise des Spezialfalls gehalten.

In Kapitel 2 erfolgt der Beweis von Satz 1.

Kapitel 1.

§ 1. Erklärungen und Hilfssätze.

Um obere Schranken für die Anzahl der in Satz 2 genannten Primzahl-k-tupel mit $z < x$ zu erhalten, kann ich mich auf $z > \sqrt{x}$ beschränken. Denn die k-tupel mit $z < \sqrt{x}$ verschlechtern die Schranke höchstens um

$$\sqrt{x} = o\left(\frac{x}{\log^\varkappa x}\right).$$

Wenn ein $z > \sqrt{x}$ ein Primzahl-k-tupel liefern soll, muß insbesondere gelten

$$\prod_{i=1}^{\varkappa} (z + y_i) \not\equiv 0 \ (p_i),$$

wo für p_i jede Primzahl $< \sqrt{x}$ gesetzt werden kann. Ich bezeichne die Anzahl der $z < x$ mit dieser Eigenschaft mit

$$F(1; p_1, \ldots, p_\nu)$$

und allgemeiner mit $F(d; p_1, \ldots, p_\nu)$, lies $F(d)$ für $\nu = 0$ die Anzahl der $z < x$ mit

$$z \equiv a \ (d), \ \prod_{i=1}^{\varkappa} (z + y_i) \not\equiv 0 \ (p_j), \ p_j < \sqrt{x}$$

wo a eine natürliche Zahl ist. Ein Ausdruck $u\,F(d; p_1, \ldots, p_\nu)$, lies $u \cdot F(d)$ für $\nu = o$, wo $u > 0$, bedeutet die Summe von u-Funktionen $F(d; p_1, \ldots, p_\nu)$, bzw. $F(d)$ mit denselben $x; y_i$, aber nicht notwendig demselben a. Im Fall $d = 1$ ist F von a frei.

Meine Aufgabe wird sein, $F(1; p_1, \ldots, p_\nu)$ nach oben abzuschätzen und die F fallen nicht, wenn ich einige p_i weglasse.

In der elementaren Zahlentheorie wird *Hilfssatz 1* bewiesen:

$$| F(d) - \frac{x}{d} | \leqq 1.$$

Hilfssatz 2: Für $r > 0$ ist

$$F(d; p_1 \dots p_r) = F(d; p_1 \dots p_{r-1}) - v_r F(d p_r; p_1 \dots p_{r-1}),$$

wo v_r gleich der Anzahl der Wurzeln von $\prod_{i=1}^{x} (z + y_i) \equiv 0 \ (p_r)$ ist, die mod. p_r inkongruent sind.

Beweis: Ich erhalte $F(d; p_1 \dots p_r)$, indem ich von $F(d; p_1 \dots p_{r-1})$ alle $z < x$ wegnehme, für die gilt

$$z \equiv a \ (d), \tag{1}$$

$$\prod_{i=1}^{z} (z + y_i) \equiv 0 \ (p_r) \tag{2}$$

$$\prod_{i=1}^{z} (z + y_i) \not\equiv 0 \ (p_i) \text{ für } 1 \leqq i < k.$$

Nach Definition ist die Anzahl der z mit

$$z \equiv b \ (d\, p_r), \ \prod_{i=1}^{z} (z + y_i) \not\equiv 0 \ (p_i) \text{ für } 1 \leqq i < \varkappa$$

gleich $F(d\, p_r; p_1 \dots p_{r-1})$ und die Kongruenzen (1) und (2) legen mod. $d\, p_r$ genau v_r Restklassen fest.

Hilfssatz 3: $F(d; p_1 \dots p_r) = F(d) - \sum_{1 \leqq i_1 \leqq r} v_{i_1} F(d\, p_{i_1} p_1 \dots p_{i_1 - 1}).$ (3)

Beweis: Für $r = o$ ist Hilfssatz 3 richtig: $F(d) = F(d)$.

Durch Schluß von $r - 1 \ (\geqq o)$ auf r erhält man:

Zuerst gibt Hilfssatz 2:

$$F(d; p_1 \dots p_r) = F(d; p_1 \dots p_{r-1}) - v_r F(d p_r; p_1 \dots p_{r-1}). \tag{4}$$

Nach Induktionsannahme ist

$$F(d; p_1 \dots p_{r-1}) = F(d) - \sum_{1 \leqq i_1 \leqq r-1} v_{i_1} F(d\, p_{i_1}; p_1 \dots p_{i_1 - 1}).$$

Einsetzen in (4) ergibt die Behauptung.

Hilfssatz 4:

$$F(d; p_1 \dots p_r) = F(d) - \sum_{1 \leqq i_1 \leqq r} v_{i_1} F(d p_{i_1}) + \sum_{1 \leqq i_2 < i_1 \leqq r} v_{i_1} v_{i_2} F(d p_{i_1} p_{i_2}; p_1 \dots p_{i_2 - 1}).$$

Beweis: Nach Hilfssatz 3 gilt

$$F(d p_{i_1}; p_1 \dots p_{i_1 - 1}) = F(d p_{i_1}) - \sum_{i_2 < i_1} v_{i_2} F(d p_{i_1} p_{i_2}; p_1 \dots p_{i_2 - 1}).$$

Einsetzen in (3) gibt die Behauptung.

Hilfssatz 5: Es seien die r_j natürliche Zahlen mit

$$r = r_0 > r_1 > \ldots > r_{t-1} > r_t \geqq o$$

und $t > o$.

Dann ist

$$F(1; p_1 \ldots p_r) \leqq F(1) + \sum_{j=1}^{2t-1} (-1)^j \sum_{i_1 \ldots i_j} v_{i_1} \ldots v_{i_j} F(p_{i_1} \ldots p_{i_j}) +$$
$$+ \sum_{i_1 \ldots i_{2t}} v_{i_1} \ldots v_{i_{2t}} F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t}}; p_1 \ldots p_{\mathrm{Min}\,(i_{2t}-1,\, r_t)}),$$

und die i genügen den Bedingungen

$$i_1 > i_2 \ldots > i_{2t} > 0, \tag{5}$$
$$i_j \leqq r \left[\frac{j-1}{2}\right] \text{ für } 1 \leqq j \leqq 2t.$$

Beweis: Für $t = 1$ hat man

$$F(1; p_1 \ldots p_r) \leqq F(1) - \sum_{i_1} v_{i_1} F(p_{i_1}) + \sum_{i_1, i_2} v_{i_1} v_{i_2} F(p_{i_1} p_{i_2}; p_1 \ldots p_{\mathrm{Min}(i_2-1,\, r_1)}),$$

und die i sollen noch den Bedingungen genügen

$$i_1 > i_2 > 0;\ i_1 \leqq r_0\ i_2 \leqq r_0.$$

Das ist aber Hilfssatz 4 mit $d = 1$, wenn man bedenkt, daß

$$F(p_{i_1} p_{i_2}; p_1 \ldots p_{i_2-1}) \leqq F(p_{i_1} p_{i_2}; p_1 \ldots p_{\mathrm{Min}\,(i_2-1,\, r_1)}).$$

Der Schluß von t auf $t+1$ verläuft so:

Aus Hilfssatz 4 folgt

$$F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t}}; p_1 \ldots p_{\mathrm{Min}\,(i_{2t}-1\ r_t)}) = F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t}}) - \tag{6}$$
$$- \sum_{i_{2t+1}} v_{i_{2t+1}} F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t+1}}) + \sum_{i_{2t+1},\ i_{2t+2}} v_{i_{2t+1}} v_{i_{2t+2}} F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t+2}}; p_1 \ldots p_{i_{2t+2}-1})$$

mit

$$1 \leqq i_{2t+1} \leqq \mathrm{Min}\,(i_{2t}-1, r_t),\ 1 \leqq i_{2t+2} \leqq i_{2t+1} - 1 = \mathrm{Min}\,(i_{2t+2}-1, r_t),$$

wie es (5) verlangt. Jetzt setzen wir (6) in Hilfssatz 5 ein und erhalten Hilfssatz 5 für $t+1$ statt t; denn wieder gilt

$$F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t+2}}; p_1 \ldots p_{i_{2t+2}-1}) \leqq F(p_{i_1} \ldots p_{i_{2t+2}})$$

Hilfssatz 6: Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5 ist

$$F(1; p_1 \ldots p_r) \leqq F(1) + \sum_{j=1}^{2t} (-1)^j \sum_{i_1 \ldots i_j} v_{i_1} \ldots v_{i_j} F(p_{i_1} \ldots p_{i_j}),$$

wo die i den Bedingungen (5) genügen.

Beweis: Hilfssatz 5 bleibt richtig, wenn man im letzten Glied

$$F(p_{i_1} \dots p_{i_{2t}}; p_1 \dots p_{\mathrm{Min}(i_{2t-1}, r_t)})$$

durch $F(p_{i_1} \dots p_{i_{2t}})$ ersetzt.

Das ergibt aber Hilfssatz 6.

Hilfssatz 7: Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5 ist, wenn die i den Bedingungen (5) unterworfen sind und

$$\tau = 1 + \sum_{j=1}^{2t} (-1)^j \sum_{i_1 \dots i_j} \frac{v_{i_1}}{p_{i_1}} \dots \frac{v_{i_j}}{p_{i_j}}$$

gesetzt wird:

$$F(1; p_1 \dots p_r) \leqq x\tau + \frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k r_m)^2.$$

Beweis: Wir wenden auf Hilfssatz 6 den Hilfssatz 1 an und erhalten

$$F(1; p_1 \dots p_r) \leqq x + 1 + \sum_{j=1}^{2t} \left\{ (-1)^j \sum_{i_1 \dots i_j} v_{i_1} \dots v_{i_j} \frac{x}{p_{i_1} \dots p_{i_j}} + \sum_{i_1 \dots i_j} v_{i_1} \dots v_{i_j} \right\} =$$

$$= x\tau + 1 + \sum_{j=1}^{2t} \sum_{i_1 \dots i_j} v_{i_1} \dots v_{i_j} \leqq x\tau + 1 + \sum_{j=1}^{2t} \sum_{i_1 \dots i_j} k^j$$

und wegen (5) weiter

$$\leqq x\tau + 1 + \sum_{j=1}^{2t} k^j r_0 r_0 r_1 r_1 \dots r_{t-1} r_{t-1} < x\tau + 1 + k \cdot \frac{k^{2t}}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} r_m^2$$

und schließlich, weil auf beiden Seiten natürliche Zahlen stehen

$$F(1; p_1 \dots p_r) \leqq x\tau + \frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k r_m)^2.$$

§ 2. Schranken für $F(1; p_1 \dots p_r)$.

Ich muß, wie in § 1 auseinandergesetzt wurde, $F(1; p_1 \dots p_v)$ mit $p_i < \sqrt{x}$ nach oben abschätzen. Das mache ich so:

Zunächst gilt

$$F(1; p_1 \dots p_v) \leqq F(1; p_\mu \dots p_\varrho),$$
$$p_i < \sqrt{x} \qquad 6k < p_i < x^{1/c_{15}(x)}$$

wo ich über $c_{15}(k) > 2$ später in geeigneter Weise verfügen werde. Um bequemer rechnen zu können, ordne ich die Primzahlen $p_\mu \dots p_\varrho$ nach der Größe und versehe sie mit Nummern von 1 bis etwa r. Dann muß ich also zeigen

$$F(1; p_1 \dots p_r) \leqq c_3 \cdot c_4(x) \cdot c_5(k; y_1 \dots y_z) \cdot \frac{x}{\log^z x}.$$

Dazu nenne ich zur Abkürzung

$$\frac{r_i}{p_i} = \gamma_i$$

Aus $v_i \leqq k$ und $p_i > 6k$ folgt

$$\gamma_i < \frac{1}{6}, \quad 1 - \gamma_i > \frac{5}{6} > \frac{4}{5}.$$

Um Hilfssatz 7 anwenden zu können, erkläre ich Zahlen r_i und t auf folgende Weise:

$$r_0 = r,$$

r_1 sei die kleinste Zahl $\geqq o$,mit

$$L_1 = \prod_{r_1 < s \leqq r_0} (1 - \gamma_s) \geqq \frac{4}{5};$$

r_1 ist nach dem vorigen $< r_0$; im Fall $r_1 > o$ sei $r_2 (< r_1)$ die kleinste Zahl $\geqq o$ mit

$$L_2 = \prod_{r_2 < s \leqq r_1} (1 - \gamma_s) \geqq \frac{4}{5}; \quad \text{usw.}$$

So erhalte ich nur von x und y_i abhängige Zahlen

$$t > o; \; r = r_0 > r_1 > \dots > r_t = 0$$

mit

$$L_m = \prod_{r_m < s \leqq r_{m-1}} (1 - \gamma_s) \geqq \frac{4}{5} \text{ für } 1 \leqq m \leqq t. \tag{7}$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 gelten somit. Ich muß noch die L_m nach oben abschätzen. Es ist aber für $1 \leqq m \leqq t - 1$

$$(1 - \gamma r_m) L_m = \prod_{r_{m-1} < s \leqq r_{m+1}} (1 - \gamma_s) < \frac{4}{5},$$

also

$$L_m < \frac{\frac{4}{5}}{1 - \gamma r_m} < \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{6}} = \frac{24}{25} = c_6 < 1. \tag{8}$$

Unter diesen Bedingungen kann man für das in Hilfssatz 7 erklärte τ zeigen:

$$|\tau| < 2 \prod_{i=1}^{t} L_i \,^{1}$$

Hilfssatz 7 gibt also

$$F(1; p_1 \ldots p_r) < 2x \prod_{i=1}^{t} L_i + \frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k r_m)^2. \tag{9}$$

§ 3. Abschätzung von $\frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k r_m)^2$.

Zunächst schätze ich das zweite Glied der Summe rechts in (9) ab. Und zwar werde ich zeigen, daß es $o\left(\frac{x}{\log^z x}\right)$ ist, also vernachlässigt werden kann. Ich benütze das bekannte Resultat

$$\prod_{s=1}^{w} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = \prod_{6\, k < p \leqq p_w} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{c_7(k)}{\log p_w}$$

oder

$$\log p_w < \frac{c_7(k)}{\prod_{s=1}^{w} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)}.$$

Für hinreichend große p gilt $p_w < k.w$ und damit

$$\log k.w < \frac{c_7(k)}{\prod_{s=1}^{w} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)}. \tag{10}$$

Für endlichviele p (nämlich die mit $p_w < k.w$) muß die Gleichung (10) nicht gelten. Ich brauche aber nur die Konstante im Zähler rechts hinreichend groß zu wählen und bekomme

$$\log k.w < \frac{c_8(k)}{\prod_{s=1}^{w} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)}, \quad w = 1, 2, \ldots$$

Das bedeutet in der Bezeichnung von (9)

$$\log k r_m < \frac{c_8(k)}{\prod_{s=1}^{r_m} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)}$$

oder

[1] Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Tract No. 35/1937.

$$\log k\, r_m < \frac{c_8(x)}{\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s})} \prod_{j=1}^{m} \prod_{r_j < s \leqq r_{j-1}} (1-\frac{1}{p_s}).$$

Aus der Definition von L_j in (7) erkennt man

$$\prod_{r_j < s \leqq r_{j-1}} (1-\frac{1}{p_s})^{2x} < \prod_{r_j < s \leqq r_{j-1}} (1-\frac{k}{p_s}) \leqq \prod_{r_j < s \leqq r_{j-1}} (1-\frac{v_s}{p_s}) = L_j$$

und mit (10)

$$\prod_{r_j < s \leqq r_{j-1}} (1-\frac{1}{p_s}) < L_j^{\frac{1}{2k}} < c_6^{\frac{1}{2x}} = c_9(x) < 1. \tag{11}$$

also schließlich

$$\log(k\, r_m) < \frac{c_8(k)}{\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s})} \prod_{j=1}^{m} c_9(k) = \frac{c_8(k)\,.\,c_q^m(x)}{\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s})}$$

Somit ist

$$\log \prod_{m=0}^{t-1} (k\, r_m)^2 < \frac{2\, c_8(k)}{\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s})} \sum_{m=0}^{\infty} c_9^m(k).$$

Wegen (11) ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_9^m(k) < c_{10}(k)$$

und

$$\log \prod_{m=0}^{t-1} (k\, r_m)^2 < \frac{c_{11}(k)}{\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s})}.$$

Dann gilt

$$\frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k\, r_m)^2 < c_{12}(k)\,.\,\exp\left\{\frac{c_{11}(k)}{\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s})}\right\}.$$

Wegen

$$\prod_{s=1}^{r}(1-\frac{1}{p_s}) > \frac{c_{13}(k)}{\log p_r}$$

und

$$p_r < x^{\frac{1}{c_{15}(k)}}$$

hat man

$$\prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) > \frac{c_{13}(k)}{\log x^{1/c_{18}(k)}}$$

Daher ist

$$\frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k\, r_m)^2 < c_{12}(k) \cdot x^{\frac{c_{30}(k)}{c_{15}(k)}}.$$

Ich erinnere, daß ich über $c_{15}(k) > 2$ noch verfügen darf (siehe § 2, oben). Ich wähle $c_{15}(k) > c_{30}(k)$ und erhalte

$$\frac{k}{k-1} \prod_{m=0}^{t-1} (k\, r_m)^2 = o\left(\frac{x}{\log^{\varkappa} x}\right).$$

Damit bleibt von (9) nur mehr

$$F(1; p_1 \ldots p_r) < 2\, x \prod_{i=1}^{t} L_i.$$

§ 4. Der Beweis von Satz 2.

Für $\prod_{i=1}^{t} L_i$ kann man schreiben

$$\prod_{i=1}^{t} L_i = \prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right) \leqq c_{16}(\varkappa) \cdot \prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^{v_s} =$$

$$= c_{16}(\varkappa) \cdot \prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^{\varkappa} \cdot \left[\prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^{\varkappa - v_s}\right]^{-1}.$$

v_s war definiert als die Anzahl der mod p_s inkongruenten Wurzeln von

$$\prod_{i=1}^{\varkappa} (z + y_i) \equiv 0 \ (p_s).$$

Diese Anzahl kann nur für endlich viele p von k verschieden sein (die näheren Verhältnisse werde ich in Kapitel 2 untersuchen), und es gilt

$$\prod_{i=1}^{t} L_i \leqq c_{16}(\varkappa) \cdot c_{17}(k; y_1 \ldots y_\varkappa) \cdot \prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^{\varkappa} \leqq$$

$$\leqq \frac{c_{22}(\varkappa) \cdot c_{17}(k; y_1 \ldots y_\varkappa)}{\log^{\varkappa} x}$$

also

$$F(1; p_1 \ldots p_r) \leqq c_{18} \cdot c_{22}(\varkappa) \cdot c_{17}(k; y_1 \ldots y_\varkappa) \cdot \frac{x}{\log^{k} x}.$$

Was zu beweisen war.

Kapitel 2.

§ 5. Erklärungen und Hilfssätze.

Um Satz 1 beweisen zu können, also die Anzahl der Primzahl-k-tupel mit vorgegebenen Abständen nach unten abzuschätzen, denke ich mir die Menge aller k-tupel in irgend einer Reihenfolge angeschrieben. Nun ordne ich diesen Klammern die Primzahlen nach folgender Vorschrift zu: Ich stelle zur s-ten Primzahl p_s die Primzahlen $p_{i-1+s}\,(i = 1 \ldots k)$ fest und bilde die Differenzen $p_{s-1+i} - p_s$ $(i = 1 \ldots k)$. Diese Differenzen nenne ich der Reihe nach $\overline{y}_i\,(i = 1 \ldots k)$ und teile die Primzahl p_s der Klammer zu, deren y_i mit den eben erhaltenen $\overline{y}_i$ übereinstimmen.

Bemerken möchte ich, daß diese Vorschrift für den Gang des Beweises völlig unwesentlich ist, man muß von ihr nur verlangen, daß sie die Menge der Primzahlen eindeutig auf die Menge aller k-tupel $(y_1 \ldots y_\varkappa)$ abbildet.

Die Anzahl der $p < x$, die nach dieser Prozedur in der Klammer $(y_1 \ldots y_\varkappa)$ enthalten sind, nenne ich $z\,(x; y_1 \ldots y_\varkappa)$ und habe die Aufgabe, z nach unten abzuschätzen. Ich bilde wie in meiner eingangs zitierten Arbeit die Summe

$$\sum_{y_1 \ldots y_\varkappa} z\,(x; y_1 \ldots y_\varkappa). \tag{12}$$

Hilfssatz 8: $\sum\limits_{y_1 \ldots y_\varkappa} z \geqq \dfrac{c_{19}\, x}{\log x}$, $c_{19} \sim 1$.

Beweis: Jede Primzahl $p < x$ kommt in genau einem $z\,(x; y_1 \ldots y_\varkappa)$ vor. Insgesamt werden daher in der Summe (12) alle Primzahlen $< x$ gezählt. Aus dem Primzahlsatz folgt die Behauptung.

Hilfssatz 9:

$$\sum_{y_1 \ldots y_\varkappa} z < \sum_{2 \varkappa \log x < y_t < x} x.$$

$$y_t > 2 \varkappa \log x, \text{ wo } t \varepsilon 1, \ldots, \varkappa.$$

Beweis: Jedes k-tupel mit $y_t > 2 \log x$ nimmt im Intervall $o < p < x$ eine Strecke $> 2 \varkappa \log x$ ein. Es können daher höchstens $\dfrac{x\,(\varkappa - 1)}{2 \varkappa \log x}$ solcher k-tupel vorhanden sein.

Hilfssatz 10:

$$\sum_{y_1 \dots y_\varkappa} z > \frac{c_{20} x}{\log x} \qquad c_{20} > 0.$$

$$y_i < 2\varkappa \log x \text{ für } i = 1, 2 \dots \varkappa$$

Beweis:

$$\sum_{y_i < 2\varkappa \log x} z = \sum z - \sum_{y_t > 2\varkappa \log x} z$$

und nach den Hilfssätzen 8 und 9

$$\sum_{y_i < 2\varkappa \log x} z > \frac{c_{19} x}{\log x} - \frac{x}{2 \log x} \text{ und } c_{19} - \tfrac{1}{2} > o.$$

Hilfssatz 11: Für die Anzahl Z der Klammern $(y_1 = o, y_2 \dots y_\varkappa)$ mit $y_i < 2\varkappa \log x$ gilt

$$Z < (2\varkappa \log x)^{\varkappa - 1} = c_{21}(\varkappa) \cdot \log^{\varkappa - 1} x.$$

Beweis: Wird in Kombinatorik gezeigt.

§ 6. Der Beweis von Satz 1.

Erstens muß ich zeigen, daß es Klammern gibt, die mindestens $c_2 \cdot c_{22}(\varkappa) \dfrac{x}{\log^\varkappa x}$ Primzahlen enthalten. Aus dem *Dirichlet*schen Prinzip und den Hilfssätzen 10 und 11 folgt aber:

Es gibt Klammern mit

$$z_0(x; y_1 \dots y_\varkappa) > \Big(\sum_{y_i < 2 \log x} z\Big) : Z >$$

$$> \frac{c_{20} x}{\log x} : c_{21}(\varkappa) \cdot \log^{\varkappa - 1} x = c_{20} \cdot c_{30}(\varkappa) \frac{x}{\log^\varkappa x}.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung eingelöst. Nun handelt es sich zweitens darum, die Anzahl dieser z_0 abzuschätzen.

Ich weiß

$$z(x; y_1 \dots y_\varkappa) < F(1; p_1 \dots p_r) \tag{13}$$

und aus Satz 2

$$F < c_{18} \cdot c_{22}(\varkappa) \cdot c_{17}(k; y_1 \dots y_r) \frac{x}{\log^\varkappa x}. \tag{14}$$

Hier ist c_{17} nicht mehr konstant, da die y_i mit $\log x$ unendlich werden. Es kommt also darauf an

$$c_{17} = \left[\prod_{s=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^{\varkappa - v_s} \right]^{-1}$$

nach oben abzuschätzen.

Zuerst interessiere ich mich dafür, bei welchen Primzahlen p_s gilt $v_s \neq k$.

Da v_s die Lösungszahl von

$$\prod_{i=1}^{k} (z + y_i) \equiv 0 \ (p_j)$$

war, kommen nur Primzahlen p_s in Frage, bei denen aus

$$z + y_i \equiv 0 \ (p_j) \text{ für irgend ein } i \ \varepsilon \ 1, \ldots, k$$

stets folgt

$$z + y_h \equiv 0 \ (p_j) \text{ für irgend ein } h \ \varepsilon \ 1, \ldots, k.$$
$$h \neq i$$

Das heißt aber

$$y_i - y_h \equiv 0 \ (p_j). \tag{15}$$

Es gibt weniger als k^2 solcher Differenzen.

Aus $v_s < k$ folgt nach dem eben Gesagten

$$\prod_{i,h} (y_i - y_h) \equiv 0 \ (p_s). \tag{16}$$

Ich nenne die p_s mit dieser Eigenschaft p_t und muß

$$c_{17} = \left[\prod_t \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)^{\varkappa} - v_t \right]^{-1}$$

abschätzen. Wegen $v_t > 0$ gilt

$$c_{17} < \prod_t (1 - \frac{1}{p_t})^{-\varkappa} \tag{17}$$

Wegen (16) gilt

$$\prod_t p_t \leqq \prod_{i,h} (y_i \quad y_h)$$

und wegen (15)

$$\prod_t p_t < c_{23} (\varkappa) \ . \ \log^{\varkappa^2} x. \tag{18}$$

Der Nenner von (17) wird am kleinsten, wenn ich möglichst viele möglichst kleine Primzahlen verwende, die (18) genügen. Am ungünstigsten werden sich also die ersten Primzahlen $p_1, p_2 \ldots$ auswirken und ich kann schreiben

$$c_{17} < \prod_{t=1, 2 \ldots} (1 - \frac{1}{p_t})^{-\varkappa},$$

wo die Nebenbedingung (18) lautet

$$\prod_{t=1,2\ldots} p_t < c_{23}(\varkappa) \cdot \log^{\varkappa^2} x. \tag{19}$$

Ich setze als bekannt voraus

$$\sum_{p<x} \log p > c_{24} \cdot x. \tag{20}$$

Ich schreibe (19) so

$$\exp\left[\sum_{t=1,2\ldots} \log p_t\right] < c_{23}(\varkappa) \cdot \log^{\varkappa^2} t$$

und logarithmiere

$$\sum_{t=1,2\ldots} \log p_t < c_{25}(\varkappa) \log_2 x.$$

Dann folgt aus (20)

$$p < c_{26}(\varkappa) \log_2 x$$

und daher

$$c_{17} < \prod (1 - \frac{1}{p_t})^{\varkappa} < c_{27}(\varkappa) \cdot \log_3^{\varkappa} x.$$

$$p_t < c_{26}(\varkappa) \log_2 x.$$

Damit bin ich über c_{17} hinreichend informiert und kann in (13) und (14) einsetzen

$$z(x; y_1 \ldots y_\varkappa) < c_{18} \cdot c_{27}(\varkappa) \cdot \frac{x}{\log^{\varkappa} x} \cdot \log_3^{\varkappa} x.$$

Ich habe

$$\sum_{y_i < 2\log x} z(x; y_1 \ldots y_\varkappa) > \frac{c_{20}\, x}{\log x}$$

Zahlen zur Verfügung. Jedes z enthält höchstens

$$c_{18} \cdot c_{27}(\varkappa) \cdot \frac{x}{\log^{\varkappa} x} \cdot \log_3^{\varkappa} x$$

Zahlen. Die Primzahl-k-tupel lassen sich also auf mehr als

$$\left(c_{20} \cdot \frac{x}{\log x}\right) : \left(c_{18} \cdot c_{27}(\varkappa) \cdot \frac{x}{\log^{\varkappa} x} \cdot \log_3^{\varkappa} x\right) = c_{28} \cdot c_{29}(\varkappa) \cdot \frac{\log^{\varkappa-1} x}{\log_3^{\varkappa} x}$$

Klammern verteilen. Dabei wurde davon Gebrauch gemacht, daß alle Klammern mit

$$z = o\left(\frac{x}{\log^{\varkappa} x}\right)$$

wegen Hilfssatz 11 zur Summe höchstens

$$c_{21}(\varkappa)\log^{\varkappa-1}x\; o\left(\frac{x}{\log^{\varkappa}x}\right) = o\left(\frac{x}{\log x}\right) = o(\Sigma)$$

beitragen.

Damit ist Satz 1 in allen Teilen bewiesen.

Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

(Eingelangt am 27. August 1950.)

1.

Jene auf einer Fläche verlaufenden Kurven, deren *Schmiegkugeln die Fläche berühren*, heißen „D-Kurven", nach G. Darboux, der sie als erster betrachtet hat[1]. Im Rahmen der konformen Geometrie kommt ihnen offenbar eine ähnliche Bedeutung zu, wie den Asymptotenlinien für die projektive Flächentheorie, doch ist ihre Mannigfaltigkeit um eine Stufe höher. Eine gewisse Einsicht in ihre Eigenart vermitteln die folgenden geometrischen Überlegungen.

Sei k eine *D-Kurve* der Fläche Φ, T ein laufender Kurvenpunkt, t die zugehörige Tangente, τ die Schmiegebene und Σ die Schmiegkugel. Σ schneidet Φ nach einer Kurve h, die in T einen Doppelpunkt aufweist und mit k vier vereinigte Punkte gemein hat; k durchsetzt mithin den einen Zweig von h einfach, den anderen oskulierend. Jeder durch t gelegte ebene Schnitt hat mit h mindestens $2 + 1 = 3$ zusammengerückte Punkte gemein, sein Krümmungskreis liegt daher auf der Trägerkugel Σ von h, die damit als die zum Linienelement (T, t) gehörige *Meusnier-Kugel* zu erkennen ist. Unter den durch t legbaren Ebenen ist nun die Schmiegebene τ von h ausgezeichnet: Alle das Element (T, t, τ) oder das entsprechende Element des zweiten Zweiges von h enthaltenden Flächenkurven — und nur diese! — treffen h in (wenigstens) $3 + 1 = 4$ zusammenfallenden Punkten und besitzen somit Σ als *Schmiegkugel*. Für jedes Linienelement (T, t) der Fläche Φ

[1] *G. Darboux*: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. 73 (1871), 732—736. — Bezüglich weiterer Literatur siehe Enz. math. Wiss. III D 3, Nr. 39.

ist demnach über die zugehörige Meusnierkugel Σ und deren Schnittlinie $\Sigma\Phi = h$ die Schmiegebene τ eindeutig mitbestimmt. Die Ermittlung der D-Kurven von Φ beruht danach auf der *Aneinanderreihung von Elementen* (T, t, τ) aus einem Vorrat von ∞^3 Exemplaren, erfordert also die Integration einer *gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung*. Auf einer (nichtsphärischen) Fläche existieren mithin ∞^2 D-Kurven; durch jeden allgemeinen Punkt gehen ∞^1 davon.

Aus der Tatsache, daß der Krümmungskreis $\Sigma\tau$ von k mit h und daher auch mit Φ vier zusammengerückte Punkte gemein hat, fließt zwanglos eine zweite Kennzeichnung der D-Linien: *Es sind jene Flächenkurven, deren Krümmungskreise die Fläche hyperoskulieren.*

2.

Schon Darboux selbst hat a. a. O.[1] den Fall einer Grundfläche 2. Ordnung betrachtet und deren D-Linien mit Hilfe elliptischer Koordinaten durch elliptische Integrale dargestellt. Sein Ansatz wurde später von A. Pell ausgewertet, der auch einige interessante geometrische Eigenschaften dieser speziellen Kurven entdeckte[2]. Einen bequemen Zugang zu den D-Linien der Quadriken eröffnen aber auch schon die einfachen, in Nr. 1 dargelegten Vorstellungen; diesen Weg beschritt vor kurzem der Verfasser, wobei sich neben neuen Eigenschaften vor allem eine tiefere Einsicht und verschiedene merkwürdige Zusammenhänge ergaben[3].

Die benützten Hilfskurven h, die aus der Grundfläche Φ von ihren Berührungskugeln Σ ausgeschnitten werden, sind nämlich im Falle einer Quadrik im allgemeinen *rationale Kurven 4. Ordnung mit vier gemeinsamen Fernpunkten* U_i $(i = 1, \ldots, 4)$, jenen Punkten von Φ, die auf dem absoluten Kugelkreis liegen. Jede solche Quartik wird aus ihrem Doppelpunkt T durch einen *Kegel 2. Ordnung* Δ projiziert, der die beiden Doppelpunktstangenten t enthält und längs derselben von den zugehörigen Schmiegebenen τ berührt wird; alle ∞^3 Kegel Δ haben ebenfalls die Fixpunkte U_i gemein, so daß ihre Fernkegelschnitte lediglich ein Büschel erfüllen. Die *Tangentenfläche* einer D-Kurve k besteht nun aus Streifenelementen (t, τ) und wird also längs jeder Erzeugenden von einem Kegel Δ tangiert: Dementsprechend wird ihre *Fernkurve*

[2] *A. Pell*: „D" lines on quadrics. Transact. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 315—322.

[3] *W. Wunderlich*: Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken. Math. Tidsskr. 1951 (im Druck).

in jedem Punkte von einem der Kegelschnitte des Büschels $U_1\, U_2\, U_3\, U_4$ berührt und *muß daher notwendig mit einem dieser Kegelschnitte c zusammenfallen.* Umgekehrt ist auch jede Flächenkurve, deren Tangenten einen festen Büschelkegelschnitt c treffen, eine D-Linie, weil sie aus Elementen (T, t, τ) besteht.

Damit sind die D-Kurven der Quadriken zunächst einmal als affine Böschungslinien gekennzeichnet und es gilt

Satz 1: Die D-Kurven einer Fläche 2. Ordnung Φ sind identisch mit jenen affinen Böschungslinien von Φ, deren Tangentenrichtkegel konzyklisch mit Φ sind[4].

Durch Spezialisierung auf *Drehquadriken* ergibt sich in Übereinstimmung mit einer Bemerkung von W. Blaschke, daß deren D-Kurven mit ihren (vielfach betrachteten) *gewöhnlichen Böschungslinien* für lotrechte Achsenlage zusammenfallen[5].

Durch Satz 1 werden die D-Kurven der Quadriken einer *konstruktiven Behandlung* zugänglich gemacht, die auf der Anwendung der vom Verfasser vor einiger Zeit entwickelten projektiven Theorie der Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung beruht[6]. Dies findet sich in der unter Fußnote 3 genannten Arbeit näher ausgeführt.

3.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Schmiegkugelmitten zu, wobei wir uns vorübergehend der Rechnung bedienen wollen. Sei — bei Beschränkung auf Mittelpunktsflächen —

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + \gamma\, z^2 = \delta \tag{1}$$

die Gleichung der *Grundquadrik* Φ in Normalkoordinaten x, y, z, so wird der konzyklische *Tangentenrichtkegel* einer D-Linie etwa durch

$$(\alpha - \lambda)\, x^2 + (\beta - \lambda)\, y^2 + (\gamma - \lambda)\, z^2 = 0 \tag{2}$$

[4] Diese Aussage ist bei Mittelpunktsquadriken offenbar äquivalent mit einem Satz von *A. Pell*, wonach die zu den Tangenten einer D-Kurve parallelen Flächendurchmesser gleich lang sind. *Pell* scheint jedoch nicht beachtet zu haben, daß Durchmesser gleicher Länge auf einem (konzyklischen) Kegel 2. Ordnung liegen. — Es ist hervorzuheben, daß der hier bewiesene Satz 1 auch für Flächen ohne Mittelpunkt gilt.

[5] *W. Blaschke*: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Mh. Math. Phys. 19 (1908), 188—204.

[6] *W. Wunderlich*: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 309—331.

dargestellt. Der parallele, von einem Flächenpunkt $T(x_0, y_0, z_0)$ ausstrahlende *Kegel* Λ hat dann die Gleichung

$$(\alpha - \lambda)(x - x_0)^2 + (\beta - \lambda)(y - y_0)^2 + (\gamma - \lambda)(z - z_0)^2 = 0, \qquad (3)$$

und deren Subtraktion von (1) liefert die zu T gehörige, im Büschel $\Phi\Lambda$ enthaltene *Schmiegkugel* Σ mit

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2(\alpha - \lambda)xx_0 + 2(\beta - \lambda)yy_0 + 2(\gamma - \lambda)zz_0 + \\ + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 2. \qquad (4)$$

Hieraus lesen wir nun unmittelbar die Koordinaten des zu T gehörigen *Schmiegkugelzentrums* T^* ab:

$$x_0^* = (1 - \frac{\alpha}{\lambda})\, x_0, \quad y_0^* = (1 - \frac{\beta}{\lambda})\, y_0, \quad z_0^* = (1 - \frac{\gamma}{\lambda})\, z_0. \qquad (5)$$

Der Übergang von T zu T^* wird demnach durch eine gewisse Affinität bewerkstelligt, welche die Hauptebenen der Quadrik festläßt. Ein geeigneter Grenzübergang dehnt die Gültigkeit dieser Beziehung auch auf die Flächen ohne Mittelpunkt aus, so daß wir allgemein aussprechen können den

Satz 2: Bei jeder allgemeinen D-Linie einer Quadrik hängen die Punkte mit den zugehörigen Schmiegkugelmitten durch eine Raumaffinität zusammen, welche die Hauptsymmetrieebenen der Fläche festläßt.

Die von den Schmiegkugelmitten erfüllte *Polare* (*Planevolute*) k^* einer solchen D-Linie k ist danach gleichfalls *affine Böschungslinie einer Quadrik* Φ^*, jedoch im allgemeinen selbst keine D-Linie mehr, wie man sich leicht überzeugt. Wohl trifft dies hingegen bei den *Drehquadriken* zu, wie auf Grund der Bemerkung im Anschluß an Satz 1 klar ist.

4.

Der Hauptzweck der vorliegenden Note ist es nun, zu zeigen, daß der gefundene affine Zusammenhang kennzeichnend ist, d. h. daß es *außer den D-Linien der Quadriken keine anderen Raumkurven gibt, deren Punkte und Schmiegkugelzentren durch eine Affinität gekoppelt sind.*

Sei also k eine Raumkurve mit der genannten Eigenschaft, k^* ihre Polare und $\mathfrak{A}$ die laut Voraussetzung bestehende Affinität, welche den Punkten T, Tangenten t und Schmiegebenen τ von k die entsprechenden Elemente T^*, t^* und τ^* von k^* zuordnet. Die von den Streifenelementen (t, τ) und (t^*, τ^*) in der Fernebene erzeugten *uneigentlichen Linienelemente* (T_u, t_u) und (T_u^*, t_u^*) hängen einerseits

ebenfalls durch die *Affinität* $\mathfrak{A}$ zusammen, anderseits – wegen $t \perp \tau^*$ und $t^* \perp \tau$ – aber auch durch die *absolute Polarität* $\mathfrak{B}$. Hieraus fließt die Beziehung

$$t_u = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,.\,T_u,$$

d. h. T_u und t_u entsprechen einander in der *Korrelation* $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}$. Die bestehende Inzidenz zwischen T_u und t_u ist dann aber bekanntlich nur unter der Bedingung möglich, daß T_u dem „*Punktkernkegelschnitt*" c von $\mathfrak{C}$ angehört. Da c als Fernkurve der Tangentenfläche von k auch von den Geraden t_u eingehüllt erscheint, kommt c gleichzeitig die Rolle des „*Geradenkernkegelschnittes*" zu und $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1}$ ist eine *Polarität*.

Es steht nun bereits fest, daß die Kurven k und k^* *affine Böschungslinien* sein müssen. Ihre Leitkegelschnitte c und c^* entsprechen einander in der absoluten Polarität $\mathfrak{B}$ und sind daher punktweise durch eine nicht ausgeartete lineare Verwandtschaft aufeinander bezogen, deren Doppeldreieck gemeinsames Poldreieck von c, c^* und dem absoluten Kegelschnitt ist. Beschränken wir uns hierbei ausdrücklich auf die reellen Möglichkeiten, so können wir sagen, daß die *Raumaffinität* $\mathfrak{A}$ (wenigstens) *drei paarweise orthogonale Richtungen festlassen muß*, also keineswegs ganz beliebig vorgebbar ist.

Benützen wir ein in diese ausgezeichneten Richtungen weisendes Achsenkreuz x, y, z, dann kann die Affinität $\mathfrak{A}$ angesetzt werden mit

$$x^* = ax + A,\; y^* = by + B,\; z^* = cz + C,\; (abc \neq 0); \qquad (6)$$

hierbei dürfte die additive Konstante jeweils weggelassen werden, wenn der zugehörige Koeffizient von 1 verschieden ist. Durch die Annahme von $\mathfrak{A}$ sind auch die beiden polaren Fernkegelschnitte c und c^* als Fundamentalkurven der Polaritäten $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in der Fernebene mitbestimmt. Sie werden beschrieben durch

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^{*2}}{a} + \frac{y^{*2}}{b} + \frac{z^{*2}}{c} = 0. \qquad (7)$$

Gehen wir nunmehr von einem Punkt $T\,(x_0, y_0, z_0)$ allgemeiner Lage aus, so ist über das Schmiegkugelzentrum $T^* = \mathfrak{A}\,T$ auch seine Tangente t bekannt, und zwar auf Grund der Bedingung, normal auf TT^* zu stehen und den Leitkegelschnitt c zu treffen. Jedem Raumpunkt sind auf diese Weise zwei Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, deren Integration auf *Raumkurven mit affiner Planevolute* führt. Zu jeder Integralkurve k gehört nämlich eine affine Kurve $k^* = \mathfrak{A}\,k$, deren Schmiegebene τ^* sicher zu t normal ist und wegen $t \perp TT^*$ den Punkt T

von k enthält, also Normalebene von k ist; k^* ist somit tatsächlich die Planevolute von k.

Die von den beiden Fortschreitungsrichtungen t aufgespannte Ebene $\vartheta \perp TT^*$ hat die Stellung

$$[(a-1)\,x_0 + A]\,x + [(b-1)\,y_0 + B]\,y + [(c-1)\,z_0 + C]\,z = \text{const}, \quad (8)$$

kann demnach als Tangentialebene einer *Quadrik* Φ

$$(a-1)\,x^2 + (b-1)\,y^2 + (c-1)\,z^2 + 2\,A\,x + 2\,B\,y + 2\,C\,z = \text{const} \quad (9)$$

angesehen werden. Das bedeutet aber: Die ∞^2 Integralkurven unseres Problems sind identisch mit den durch den Leitkegelschnitt c auf den ∞^1 homothetischen Flächen Φ definierten affinen Böschungslinien. Diese stellen aber wiederum *D-Linien der Quadriken* Φ dar, weil c die absoluten Punkte dieser Flächen enthält.

Damit ist nun tatsächlich die behauptete Umkehrung des Satzes 2 erwiesen:

Satz 3: Besteht bei einer reellen Raumkurve ein affiner Zusammenhang zwischen ihren Punkten und Schmiegkugelmitten, dann ist sie D-Kurve einer Quadrik.

Über den idealtheoretischen Beweis des Satzes von Bézout.

Von

W. Gröbner, Innsbruck.

(Eingelangt am 21. September 1950.)

In der letzten Zeit haben zwei hervorragende Vertreter[1] der algebraischen Geometrie neue Beweise des Satzes von Bézout veröffentlicht, wobei beide Autoren übereinstimmend großes Gewicht auf die Erklärung legten, daß ihre Beweise, abgesehen von deren Einfachheit und Kürze, „rein geometrisch und ohne Eliminationstheorie" beziehungsweise „ohne Benützung der Resultante und der Idealtheorie" geführt seien. Diese Erklärungen, von so bedeutenden und einflußreichen Vertretern der Wissenschaft ausgesprochen, müssen den Eindruck erwecken, daß die Eliminationstheorie und die mit ihr eng zusammenhängende und sie fortsetzende Idealtheorie ein überflüssiger Ballast der algebraischen Geometrie, ja der Algebra überhaupt seien.

Diese auch von anderen führenden Mathematikern[2] offen geäußerte Ansicht scheint mir bedenklich zu sein und ich möchte es daher unternehmen, einige Gegenargumente vorzubringen. Die Eliminationstheorie und die Idealtheorie sind mit so glänzenden Namen unserer besten Mathematiker der letzten Generation, u. a. *Kronecker*, *Dedekind*, *Hilbert*,

[1] *F. Severi*, Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione. Math. Z. Berlin **52**, 827—851 (1950). — *B. L. van der Waerden*, Le théorème de Bézout pour les hypersurfaces. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. s. **30**, 73—74 (1949).

[2] Vgl. *Severi*, a. a. O. S. 828, Anm. 6: „Pertanto anche per la via qui indicata viene cancellata dalla geometria algebrica ogni traccia di sviluppi inerenti alle teorie dell'eliminazione, anche se, sotto certi riflessi, convenga conservare una parte del linguaggio. Questo è uno scopo altrimenti realizzato da *Chevalley* e da *Weil*." — Die von *Severi* hier angezogene Stelle aus dem Buche von *A. Weil*, Foundation of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. vol. XXIX (1946), S. 31, lautet so: „The device that follows, which, it may be hoped, finally eliminates from algebraic geometry the last traces of elimination-theory, is borrowed from *C. Chevalley's* Princeton lectures."

Hurwitz, *Macaulay*, *Emmy Noether*, aufs engste verknüpft, daß es wohl einer gründlichen Überlegung wert erscheinen dürfte, bevor man diesen kostbaren Bestand unserer mathematischen Wissenschaften als unbrauchbar ausscheidet.

Es ist allerdings nicht meine Absicht und nicht der Zweck dieser mit bescheidenen Kräften unternommenen Arbeit, zu prüfen, ob die von den beiden Autoren vorgelegten Beweise tatsächlich den beigefügten Erklärungen entsprechen, denn es ist klar, daß eine solche Prüfung sich nicht darauf beschränken dürfte, bloß den Wortlaut des dastehenden Beweises zu untersuchen, sondern daß sie sich auch auf die beim Beweise als bekannt vorausgesetzten Sätze und Prinzipien erstrecken müßte, um zu erkennen, ob auch diese ohne Hilfe der Eliminationstheorie und Idealtheorie gewonnen worden sind. Das würde aber ein sorgfältiges Studium von mehreren hundert Seiten schwierigster mathematischer Spezialliteratur erfordern, da die Voraussetzungen in beiden Fällen nicht elementarer Natur sind.

Ich möchte vielmehr in der Weise eine Lanze für die sozusagen in die Verbannung geschickte Eliminationstheorie und Idealtheorie einlegen, daß ich den beiden zitierten Beweisen einen anderen Beweis für den Bézoutschen Satz gegenüberstelle, der mit den Mitteln dieser verfemten Theorien geführt ist, um es dann dem Urteil des einzelnen zu überlassen, ob wirklich dieser idealtheoretisch geführte Beweis so darstellbar und umgekehrt, d. h. es sind die im Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ enthaltenen Formen des Grades t. Es ist also nur notwendig diese Anzahl abzuzählen. Das ist eine einfache Rechenaufgabe, die in einem allgemeineren Rahmen durch den Algorithmus der *Hilbertfunktion* $H(t; \mathfrak{a})$ des Ideals $\mathfrak{a}$ gelöst wird und die hier nicht wiederholt zu werden braucht[1]. Sie liefert unmittelbar im Falle endlich vieler Schnittpunkte, d. h. im Falle eines Hauptklassenideals $\mathfrak{a}$, das bekannte Resultat $N = g_1 g_2 \cdots g_n$.

Die Aufgabe, die Anzahl der Schnittpunkte zu bestimmen, gibt natürlich weniger auf als diejenige, die Schnittpunkte selbst anzugeben; daher erfordert dies auch weitere Mittel. Jedoch sind diese Mittel und ihre allgemeine Theorie seit langem in der Idealtheorie vorbereitet. Es ist das der in ihrem Zentrum stehende Zerlegungssatz von *E. Lasker* und *E. Noether*, nach dem das Ideal $\mathfrak{a}$ eine im wesentlichen eindeutige reduzierte Darstellung durch Primärideale

[1] Vgl. MAG., S. 164.

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s]$$

besitzt[1]. Die zu den Primäridealen $\mathfrak{q}$ gehörenden Primideale $\mathfrak{p}$ sind in dem von uns ins Auge gefaßten Fall nulldimensional und besitzen daher je eine einzige Nullstelle; sind also in (2) etwa s Primärkomponenten enthalten, so haben wir im ganzen s verschiedene Schnittpunkte.

Die Multiplizität eines jeden Schnittpunktes werden wir folgerichtig durch die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{q})$ der entsprechenden Primärkomponente erklären müssen; diese ist gleich der Ideallänge des Primärideals $\mathfrak{q}$. Das stimmt mit der bereits von *Macaulay* gegebenen Definition der Multiplizität überein[2]. Nach einer bekannten Formel der Hilbertfunktion gilt nun[3]

$$H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{q}_1) + H(t; \mathfrak{q}_2) + \ldots + H(t; \mathfrak{q}_s). \tag{3}$$

Da $H(t; \mathfrak{a}) = N$ ist, sieht man, daß tatsächlich die Summe der Multiplizitäten der einzelnen Schnittpunkte gleich dem Produkt der Gradzahlen der Formen (1) ist.

Damit ist der Beweis vollständig, wenn man hinzufügt, daß im Falle unendlich vieler Schnittpunkte in der Zerlegung (2) mindestens eine Primärkomponente höherer Dimension auftritt und gleichzeitig die Hilbertfunktion von $\mathfrak{a}$, weil $\mathfrak{a}$ nicht mehr zur Hauptklasse gehört, auch nicht mehr konstant ist, sondern mit t zunimmt.
schwierig und kompliziert, oder etwa den geometrischen Anschauungen und Begriffen so fremd ist, daß tatsächlich diese Theorien als überflüssiger Ballast der algebraischen Geometrie bezeichnet werden müssen.

Ferner ist die sogenannte Kürze und Einfachheit eines Beweises immer ein sehr relativer Begriff, denn es wird selten darauf Rücksicht genommen, welche Sätze in dem einen oder dem anderen Beweis als bekannt vorausgesetzt werden. Besonders beim Beweis eines Satzes, der wie der Bézoutsche Satz zu den Grundlagen einer Wissenschaft gehört, ist die Gefahr sehr groß, daß man zum Beweise Voraussetzungen benützt, die bereits implizit den zu beweisenden Satz enthalten, so daß dann der etwaigen Kürze und Einfachheit des Beweises kein Lob zu spenden ist. Immer aber, wenn die Wahl der Kenntnisse, die vorausgesetzt werden dürfen, völlig frei steht, hängt es nur von ihrer geschickten

[1] Über die konstruktive Ausführung dieser Zerlegung vgl. meine Arbeit: „Über die Eliminationstheorie", Monatsh. f. Math. **54** (1950), 71—78.

[2] *F. S. Macaulay*, The algebraic theory of modular systems, Cambridge Univ. Press 1916, S. 78.

[3] Vgl. etwa MAC., S. 158.

Auswahl ab, wie lang oder kurz der noch übrig bleibende Beweis ausfällt. Andererseits ist es natürlich auch immer möglich, einen Beweis beliebig zu verlängern, indem man die Voraussetzungen entsprechend weit zurück verlegt. Eine feste Norm dafür gibt es nicht, denn die passende Auswahl der als bekannt vorauszusetzenden Kenntnisse hängt außer vom jeweiligen Stande der Wissenschaft auch von vielen äußeren und zufälligen Umständen ab, und daher ist auch die Länge oder Kürze eines Beweises im allgemeinen kein Maßstab für seine Güte.

Es liegt mir daher ferne zu behaupten, daß der idealtheoretische Beweis etwa kürzer sei, als irgendein anderer. Vielmehr möchte ich die Aufmerksamkeit auf die Tatsache lenken, daß er dem geometrischen Denken besonders nahe kommt und daß die geometrische Struktur des Beweises nur durch den abstrakten Formalismus verdeckt wird, aber leicht wieder zum Vorschein gebracht werden kann.

Der zu beweisende spezielle Satz von Bézout[1] lautet so: *In einem projektiven Raum* P_n *der Dimension n haben n Hyperflächen der Grade* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *genau* $N = g_1 g_2 \ldots g_n$ *oder unendlich viele Schnittpunkte gemeinsam.*

Eine Hyperfläche des Grades g im P_n ist analytisch durch eine Gleichung $f(x) = 0$ gegeben, wo links eine Form des Grades g in den homogenen Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus dem komplexen Zahlkörper steht. Wir haben also zu beweisen, daß die Gleichungen

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0 \tag{1}$$

der Grade $g_1, g_2, \ldots, g_n$ im allgemeinen genau N Lösungen besitzen.

Zum Beweise knüpfe ich an die folgende, in der algebraischen Geometrie seit langem wohlbekannte und geläufige Tatsache an, daß die den Hyperflächen eines genügend hohen Grades t auferlegte Bedingung, durch N fest gegebene Punkte zu gehen, genau N lineare homogene Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der Form ausmacht. Da es im ganzen $H(t) = \binom{t+n}{n}$ linear unabhängige Formen des Grades t in $n+1$ Variablen gibt, wird es also genau $H(t) - N$ linear unabhängige Formen jedes (genügend hohen) Grades t geben, welche die gegebenen Punkte enthalten.

---

[1] Bezüglich der Formulierung und der näheren Einzelheiten des Beweises verweise ich auf mein Buch: „Moderne algebraische Geometrie", Springer-Verlag, Innsbruck und Wien 1949, S. 175. Im folgenden kurz mit „MAG." zitiert.

Um also die Anzahl der Schnittpunkte der Hyperflächen (1) *zu ermitteln, brauchen wir nichts anderes zu tun, als die Anzahl der linear unabhängigen Hyperflächen eines genügend hohen Grades t zu bestimmen, welche durch ihre Schnittpunkte hindurchgehen; ist diese Anzahl* $H(t) - N$, *so ist die Anzahl der Schnittpunkte N.*

Nun aber sind alle Hyperflächen eines beliebigen Grades t, welche die Schnittpunkte von (1) enthalten, in der Gestalt

$$h_1(x) f_1(x) + h_2(x) f_2(x) + \ldots + h_n(x) f_n(x)$$

Buchbesprechungen.

Die Geschichte der Erkenntnis. Von *J. P. Arend.* 330 S.

Die Determination der gleichzeitig gleichzahlig seienden und werdenden Sachverhalte des Alls. (Komplement zur Geschichte der Erkenntnis.) Von *J. P. Arend.* 104 S. (Schriftenreihe technisch-biologischer Forschung) Zürich: Thomas-Verlag. 1948.

Soviel Ref. sieht, behauptet Verf. u. a., daß die Mathematik und axiomatisch aufgebaute Physik nichts über die Welt aussagen, was man ohnehin nicht bezweifelt. Soweit die Darlegungen des Buches andere Gebiete betreffen, scheinen sie mir aus dem Rahmen der Besprechung zu fallen. Im Vorwort sagt Verf.: „Es ist kein Platz mehr für die metaphysische Begriffsbildung...". Dagegen greifen wir z. B. folgenden Satz des Buches heraus: „Wird der äquatoriale Zeitwechsel standortseiend erregter früher, so wird in der Folge der polare Zeitwechsel später. Diesen Zustandswechsel nennt man indeterminiert Fieber, so wie man das beschleunigtere Früher-Werden des polaren Zeitwechsels, das ja im Feldwechsel das standortseiende Später-Werden des äquatorialen Zeitwechsels in sich schließt, Schüttelfrost nennt;...". (Die Geschichte der Erkenntnis, S. 283). Nebenbei sei noch bemerkt, daß Verf. im Vorwort die Wichtigkeit anschaulicher Begründungen in der Wissenschaft hervorhebt, im Text aber z. B. für diese Methode auf das alte China vor Griechenlands Blüte verweist. Soviel jedoch Ref. bekannt ist, bildet gerade die altchinesische Wissenschaft ein Beispiel für baldige Erstarrung in wirklichkeitsfremden Formen.

L. Schmetterer, Wien

Ontwakende Wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde. Von *B. L. van der Waerden.* (Historische Bibliotheek voor de exacte Wetenschappen: Band VI.) 332 S. Groningen: P. Noordhoff N. V. 1950. Geb. hfl. 13.50.

Van der Waerdens Werk bietet die schon lange fällige Gesamtdarstellung der ägyptischen, babylonischen und griechischen Mathematik und klärt soweit dies heute bereits möglich ist, die Zusammenhänge zwischen dem Wissen des alten Orientes und dem großartigen Bau der griechischen Arithmetik und Geometrie. Der Plan Neugebauers, Ähnliches auszuführen ist — wohl durch die Ungunst der Zeit - nur bis zur Darstellung der ägyptischen und babylonischen Mathematik gediehen. Van der Waerdens wohl einzig richtige Auffassung vom Verhältnis zwischen der orientalischen und der hellenischen Wissenschaft wird sich hoffentlich allgemein durchsetzen: Die Griechen übernahmen aus dem Osten Material, die Schaffung der Wissenschaft ist ihr alleiniges Verdienst. Da nunmehr eine geschlossene und soweit unsere Kenntnisse reichen, wohl lückenlose Darstellung der hellenischen Mathematik vorliegt, kann man die Fülle und Tiefe der Gedanken, wie sie den Griechen zu eigen waren, erst vollends würdigen. Wie schon im Vorwort hervorgehoben wird, bietet das Buch auch dem Kenner manches Neue. Mit größtem Interesse liest man auch die Darlegungen über die

Ursachen für den Verfall der griechischen Mathematik. Ob aber tatsächlich neben den politischen und sozialen Gründen wesentlich Mängel der Disziplin selbst (wie das Fehlen eines algebraischen Formalismus) am Niedergang beteiligt waren, scheint nicht völlig erwiesen. Der römische Krämergeist hatte für die Mathematik sicherlich nichts übrig, der römische Soldat aber interessierte sich höchstens für einen Mathematiker, wenn er Kriegsmaschinen bauen konnte. Die Tatsache, daß der griechischen Astronomie ein gleiches Schicksal nicht beschieden war, hängt doch wahrscheinlich mit ihrer unmittelbar praktischen Bedeutung und den Bedürfnissen eines weitgreifenden Handels zur See zusammen. Vielleicht war auch die enge Verbindung mit der Astrologie ein Schutz. Es kann als sicher angenommen werden, daß die große Bedeutung, welche dieser erstmaligen Gesamtdarstellung zukommt, bald die Übersetzung aus dem Holländischen in andere Sprachen mit sich bringen wird, so daß das bedeutsame Werk einem noch größeren Leserkreis zugänglich wird.

L. Schmetterer, Wien

Bestand und Wandel. Von *G. Kowalewski*. 309 S. München: R. Oldenbourg. 1950.

Diese Lebenserinnerungen des kürzlich verstorbenen bedeutenden Gelehrten, des Verfassers zahlreicher verdienstvoller Lehrbücher, wird nicht nur der Mathematiker mit Vergnügen lesen; neben den zahlreich eingestreuten mathematischen Exkursen, die ein lebendiges Bild einiger Hauptrichtungen mathematischer Forschung vom letzten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts an entwerfen, findet der Leser so vieles, das für die Geschichte der deutschen Hochschulen in dieser Zeit wertvoll und aufschlußreich ist und so amüsant erzählt wird, daß er das Buch nur ungern aus der Hand legen wird. Aus den vielen anekdotischen Einzelzügen — die man wie z. B. die Geschichte von dem verunglückten Habilitationsversuch Pringsheims in Bonn, wohl nicht immer wörtlich nehmen darf — rundet sich ein durch die Brille einer ungemein sympathischen Persönlichkeit gesehenes Bild vom Leben und Treiben an großen und kleinen Hochschulen Deutschlands sowie an der Prager Deutschen Technischen Hochschule. Aus allen Kapiteln spricht ein Hauptzug der Persönlichkeit des Verfassers, seine schöne Begeisterung für seine Wissenschaft und deren Vertreter, die ihn bei der Erinnerung an seinen großen Lehrer Lie bis zu dem gewagten Ausspruch hinreißt, dieser sei der größte Mathematiker aller Zeiten gewesen. Wir stoßen uns nicht an diesem Werturteil — über solche zu streiten, wäre müßig — sondern freuen uns, daß gerade die Partien des Buches, welche von Lie handeln, besonders eingehend nach der mathematischen Seite hin durchgearbeitet sind und eine schöne Einführung in die Ideen des großen Norwegers bilden.

J. Radon, Wien

Zur Analysis des Endlichen und des Unendlichen. Von *G. Kowalewski*. Mit 24 Textabb., 274 S. München: R. Oldenbourg. 1950.

Diese Vorlesungen stammen aus den letzten Kriegsjahren, in denen alle Semester verkürzt waren. Deshalb bemühte sich der Autor, in kurzer Zeit möglichst viel zu bieten. Dies war ihm dank seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Größe möglich, stellte aber andererseits an die Hörer sehr große Anforderungen. Das Buch enthält die lineare Algebra, manches aus der Analytischen Geometrie, ferner Differential- und Integralrechnung, Elemente der Funktionentheorie und der Differentialgleichungen. Die Darstellung ist eigenartig, es fehlt jede Epsilontik, die Ausdrucksweise ist anschaulich, so ist bei der Ein-

führung des Grenzwertbegriffes von Differenzen die Rede, die in Nichts zusammenschmilzen, verklingen und verglimmen. Es gibt Limesgänger, Limesschicksal und mehrmals tritt der Limestod ein. Relativ viel wird über die Newtonsche Quadraturformel und über die Gaußsche Integralapproximation gebracht. Um den Rang einer Matrix praktisch zu berechnen, würde ich das Reduktionsverfahren dem hier angegebenen vorziehen. Auch dieses letzte Werk des jüngst verstorbenen Autors ist eine wertvolle Bereicherung unserer großen Literatur zur Analysis und verdient gründlich studiert zu werden.

N. Hofreiter, Wien

Mathematische Grundlagenforschung. Von *A. Schmidt*. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Zweite Auflage: Band II, Heft 1, Teil II.) 48 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950. $ 1.34.

Nach langer Pause liegt nun wieder ein Heft der Neubearbeitung der „Enzyklopädie" vor. Der Verfasser gliedert seinen Stoff in vier Abschnitte: Axiomatik und allgemeine Beweistheorie, Kodifikation und Beweistheorie der Zahlenlehre, die logische Begründung der Mathematik, Intuitionistische Mathematik, deren Inhalt durch diese Titel genügend gekennzeichnet ist. Der Verfasser bemerkt in der Einleitung, daß er philosophische Erörterungen nach Möglichkeit vermeidet, vielmehr den eigentlich mathematischen und methodischen Gehalt der Theorien in den Vordergrund stellt. Er liefert einen Abriß des systematischen Aufbaus der Theorie der Grundlagenprobleme, in dem von Fall zu Fall auf die Literatur verwiesen wird. Diese ist bis 1949 berücksichtigt, doch machen die Literaturangaben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, vielmehr wird der Leser auf andere Bibliographien verwiesen. So gelingt es dem Verfasser, auf knappstem Raum der schwierigen Aufgabe gerecht zu werden, sowohl dem Leser, der eine rasche Orientierung wünscht, wie auch dem, der über Einzelfragen Auskunft sucht, ein zuverlässiger Ratgeber zu sein.

J. Radon, Wien

Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik. Von *W. Schmeidler*. VIII, 155 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1949.

Das vorliegende Buch ist ein Beispiel dafür, daß es didaktisches Geschick und gründliche Sachkenntnis zu Wege bringen, einerseits dem Mathematiker in seiner Anforderung an Strenge, anderseits dem interessierten Techniker in den Bestrebungen nach Anwendung des Kalküls zu genügen und noch dazu im Rahmen einer nicht allzu umfangreichen Schrift zu verbleiben. Die Theorie dringt weit in die Materie ein, kommt z. B. bis zur Hauptachsentransformation normaler Matrizen, führt den Begriff der normalisierbaren Matrix ein, welche sich später als identisch mit den zu Diagonalmatrizen ähnlichen Matrizen erweist, geht anhangsweise auf die hübschen Schurschen Eigenwertabschätzungen und den sich hieraus ergebenden Hadamardschen Determinantensatz ein, weist nachdrücklich darauf hin, daß die Hurwitzschen Stabilitätskriterien in allgemeinerer Form auf Hermite zurückgehen und findet vielfach eine Darstellung, welche Parallelen zur Theorie der Integralgleichungen sofort erkennen läßt. Anderseits sind entweder im Text selbst oder in den jedem Abschnitt angeschlossenen Übungen ausführlich Anwendungen dargestellt, welche den verschiedensten Gebieten entnommen sind (Fachwerke, Elektrisches Netzwerk, Elektrische Schwingungen, Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt u. a.). Besonderes Interesse verdient der 6. und 7. Abschnitt, welche der praktischen Behandlung von linearen Gleichungssystemen (Iterationsmethode) und der Bestimmung von

Eigenwert und Eigenvektor einer Matrix gewidmet sind, wobei aber gleichzeitig auch auf den besonders nach der mathematischen Seite hin orientierten Leser Bezug genommen wird (Konvergenz der Näherungsverfahren). Die beiden letzten Kapitel besprechen die Anwendung des Matrizenkalküls auf die Integration von Differentialgleichungssystemen, wobei auch die linearen Systeme mit variablen Koeffizienten Beachtung finden, insbesondere mit periodischen Koeffizienten. Ein Beispiel wird zum Anlaß genommen, kurz die Hillsche Differentialgleichung zu untersuchen.

Wie Verf. im Vorwort hervorhebt, ging das Buch aus Vorträgen hervor, welche vor theoretisch interessierten Ingenieuren aller Fachrichtungen gehalten wurden. Diese (auch rein äußerlich in der Gliederung festgehaltene) Tatsache ist noch erkennbar, in der breiten, doch immer anziehenden Darstellung, welche dem verdienstvollen Buch rasch einen Freundeskreis sichern wird.

L. Schmetterer, Wien

Moderne Algebra. Von *B. L. van der Waerden*, unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Erster Teil. Dritte, verbesserte Auflage. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von W. Blaschke, R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band XXXIII.) VIII, 292 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 24.—, geb. DM 27.—.

Eine neue Auflage wurde notwendig — nicht weil der Titel heute nicht mehr berechtigt wäre — sondern weil das Buch seit 6 Jahren vergriffen ist und als Standardwerk der Algebra dringend gebraucht wird. Ziel und Anlage sind gegenüber den ersten zwei Auflagen unverändert geblieben. Die Änderungen sind meist geringfügig; sie bestehen aus neuen Zitaten, kleinen Änderungen, wodurch die Darstellung leichter verständlich wird, und nur selten wurde ein Paragraph stärker abgeändert, wie etwa bei der Darstellung der Normen und Spuren. Die Abschnitte über Wohlordnung und transfinite Induktion, die in der zweiten Auflage weggelassen wurden, wurden wieder aufgenommen. Wesentlich erweitert wurde hingegen das Kapitel über bewertete Körper. Dies ist erwünscht, da die Bewertungstheorie in der Zahlentheorie (siehe etwa das Buch von Hasse) und in der algebraischen Geometrie von grundlegender Bedeutung ist. Während sich der Verfasser in der zweiten Auflage noch auf den Fall beschränkte, daß der Grundkörper perfekt bewertet ist, wird nun auch der allgemeine Fall betrachtet. Es wird gezeigt, wie man alle archimedischen und nicht-archimedischen Bewertungen eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers findet. Sodann wird die Bewertung der algebraischen Funktionenkörper besprochen. Mit einem Paragraphen über die abstrakte Riemannsche Fläche schließt das Buch. Die „Moderne Algebra" von v. d. Waerden ist ein den Mathematikern der ganzen Welt so gut bekanntes Buch, daß jedes weitere Wort darüber überflüssig ist. In drucktechnischer Hinsicht ist das Buch so vorzüglich wie früher.

N. Hofreiter, Wien

Grundzüge der Galoisschen Theorie. Von *N. Tschebotaröw*. Übersetzt und bearbeitet von H. Schwerdtfeger. XVI, 432 S. Groningen Djakarta: P. Noordhoff N. V. 1950.

Die Galoissche Gruppe eines Polynoms über einem Grundkörper K ist nach der „abstrakten" Auffassung die Automorphismengruppe seines Wurzelkörpers über K. In der „konkreten" Auffassung, wie bei Galois selbst, betrachtet man die zu der obigen Gruppe isomorphe Permutationsgruppe der Wurzeln des

Polynoms, welche dadurch charakterisiert wird, daß bei ihrer Anwendung jede bestehende Relation zwischen den Wurzeln richtig bleibt. Der Verf. legt seiner Darstellung die letztere Auffassung zugrunde und die Theorie wird nach Mertens und Schatunowski mittels der Funktionalmoduln entwickelt. Dies sind Polynome in den Wurzeln, welche gleich Null gesetzt, gerade die Relationen liefern, die eine Basis aller Relationen bilden. Diese Form der Theorie ist besonders geeignet, die Relationen zwischen den Wurzeln zu übersehen. Sie gestattet auch leicht den Übergang zur Löwyschen Verallgemeinerung der Galoisschen Theorie, welche eine beliebige endliche separable algebraische Erweiterung (nicht nur eine normale) zugrundelegt und in diesem Buch ebenfalls behandelt wird. Der Verfasser beschränkt sich auf die Körper der Charakteristik Null, abgesehen vom fünften Kapitel, wo die Galoissche Theorie der endlichen Körper gesondert entwickelt wird. Der Galoisschen Theorie im dritten Kapitel werden zwei ausführliche Kapitel über Gruppen- und Körpertheorie vorweggeschickt. Hier findet sich eine interessante Untersuchung von Bessel-Hagen über den Bertrandschen Satz wonach die S_n für $n \geq 5$ keine Untergruppe hat mit einem Index zwischen 2 und n. Das vierte Kapitel über auflösbare Gleichungen enthält eine schöne Darstellung der Gleichungen fünften Grades und der Möndchen des Hippokrates (hier hat ja der Verf. die Theorie bedeutend gefördert).

Das interessanteste Kapitel, auch für den Fachmann, ist das letzte, welches sich mit den Gleichungen vorgegebener Gruppe beschäftigt. Es ist schade, daß hier manches aus dem russischen Original nicht übernommen wurde. Ein Anhang bringt dann noch die elementare Zahlentheorie, so daß das Studium des Buches keinerlei Vorkenntnisse verlangt. Es muß hervorgehoben werden, daß der Verfasser wie der Bearbeiter des Werkes keine Mühe gescheut haben, es so leicht lesbar als möglich zu gestalten. So ist ein interessantes, ausgezeichnet verständliches Lehrbuch entstanden, welches nur wärmstens empfohlen werden kann.

Die Ausstattung des Buches ist hervorragend.

E. Hlawka, Wien

Vorlesungen über Zahlentheorie. Von *H. Hasse*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von W. Blaschke, R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt und B. L. van der Werden: Band LIX.) Mit 28 Textabb., XII, 474 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 42.—, geb. DM 45.—.

Der Verfasser hat jetzt seiner „Zahlentheorie" (Akademieverlag Berlin 1949), welche die Arithmetik in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern behandelt, eine „elementare" Zahlentheorie folgen lassen, welche sich um die Zahlentheorie der ganzen rationalen Zahlen gruppiert und im wesentlichen bis zu den quadratischen Zahlkörpern geht. Das Buch gliedert sich in vier Abschnitte. Der erste Abschnitt „Grundlagen" bringt die grundlegenden Sätze bis zur Struktur der primen Restklassengruppen. Hierbei ergibt sich Gelegenheit auf die Artinsche Vermutung hinzuweisen, die sich mit der Frage beschäftigt, für welche Primzahlen eine gegebene ganze Zahl Primitivwurzel ist. Im zweiten Abschnitt „Quadratische Reste" wird das quadratische Reziprozitätsgesetz nicht nur mittels des Gaußchen Lemmas, sondern auch mit Gaußschen Summen bewiesen. Ein sehr interessanter Paragraph beschäftigt sich mit Verteilungsfragen über quadratische Reste, deren Resultate durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen plausibel gemacht und für einige Spezialfälle bewiesen

werden. Es ist dies eine Theorie, an der der Verf., wie bekannt maßgeblichen Anteil hat. Der dritte Abschnitt behandelt den Dirichletschen Primzahlsatz. Zunächst werden Sonderfälle betrachtet. Der Beweis des allgemeinen Satzes wird zunächst durch den Eulerschen Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen vorbereitet und dann der Dirichletsche Beweisgang dargelegt. Erst dann wird der Beweis im einzelnen genau durchgeführt. Zunächst wird eine ausführliche Theorie der Charaktere abelscher Gruppen vorausgeschickt, die L-Reihen werden eingeführt und der Beweis bis zum Nachweis von $L(1/\chi) \neq 0$ gebracht. Dabei ergibt sich Gelegenheit, die Begriffe der natürlichen und Dirchletschen Dichte zu erläutern. Der letzte Teil des Beweises nimmt den größten Teil des Abschnittes (42 Seiten) ein und wird auf drei Arten geführt: nach Mertens, funktionentheoretisch (in zwei Varianten) und mit Hilfe der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Diese Beweise werden in einer überaus durchsichtigen und ausführlichen Art dargestellt, welche einzigartig ist. Es ist dies ein Kabinettstück meisterhafter Darstellung ersten Ranges. Auf interessante Einzelheiten einzugehen verbietet der Raum. Der vierte Abschnitt „Quadratische Zahlkörper" bringt zunächst die elementaren Tatsachen, die geometrische Darstellung der ganzen Zahlen als Gitterpunkte und die Einheitentheorie. Dabei wird die Theorie der Kettenbrüche gebracht, und zwar in matrizenmäßiger Darstellung. Nachdem an Beispielen dargelegt wird, daß hier der Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie nicht mehr allgemein gilt, wird auf den euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern eingegangen. Hier ist hinzuzufügen, daß dieses Problem, nach Vorarbeiten vieler Forscher, von österreichischer Seite ist N. Hofreiter zu nennen, von H. Chatland und H. Davenport (Canad. Journ. of Moth **2** (1950)) vollständig gelöst wurde. Davenport hat jetzt begonnen, diese Frage auch in höheren Zahlkörpern zu behandeln. Die Theorie in allgemeinen quadratischen Zahlkörpern wird mit Hilfe der Divisoren entwickelt (nach Kummer, wie der Verf. hervorhebt) und der Zusammenhang mit den Idealen hergestellt. Beim Nachweis der Endlichkeit der Klassenzahl ergibt sich Gelegenheit, den Minkowskischen Fundamentalsatz herzuleiten. Dann folgt die Theorie der Dirichletschen Klassenzahlformeln. Diesen Ausdrücken, besonders wenn die Diskriminante positiv ist, sieht man es bekanntlich nicht an, daß sie ganze Zahlen sind. Umformungen, welche dies erkennen lassen, werden nun auseinandergesetzt. (Diese Umformungen verdankt man dem Verf.) Der Zusammenhang zwischen quadratischen Zahlkörpern und quadratischen Reziprozitätsgesetz ergibt Gelegenheit, einen Überblick über die allgemeine Klassenkörpertheorie zu geben. Dann folgt eine systematische Theorie der allgemeinen Gaußschen Summen mit Ausblick auf die Untersuchungen von Davenport und dem Verfasser (Crelle **172** (1934)). Für die Vorzeichenbestimmung der gewöhnlichen Gaußschen Summen (also die Summen für quadratische Charaktere) wird ein stark algebraischer Beweis gegeben. Den Abschluß dieses Abschnitts und damit des Buches bildet die Besprechung der Kummerschen Vermutung über die Gaußschen Summen zu kubischen und biquadratischen Charakteren.

Man sieht aus dieser, bei weitem nicht vollständigen Übersicht, daß hier ein Lehrbuch der Zahlentheorie vorliegt, welches, ohne die historische Entwicklung zu vernachlässigen, einen durchaus modernen Standpunkt einnimmt, an dessen Entwicklung der Verfasser ja entscheidenden Anteil hat. Die Darstellung ist von äußerster Prägnanz und Klarheit, wie man es bei dem Verfasser gewohnt ist. Es ist d a s Lehrbuch der Zahlentheorie.

Die Ausstattung des Buches ist, wie bei dem Verlag üblich, eine sehr gute.

E. Hlawka, Wien

Zahlentheorie. Von *H. Hasse.* XII, 468 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1949. Geb. DM 47.—.

Für die algebraische Zahlentheorie gibt es zwei wesentlich verschiedene Begründungsweisen: 1. die idealtheoretische und 2. die bewertungstheoretische. Die idealtheoretische Methode führt schnell und unschwer zu den wichtigsten Sätzen der algebraischen Zahlentheorie und hinauf bis zur Klassenkörpertheorie und zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz. Die bewertungstheoretische Methode ist zunächst begrifflich schwieriger. Sie setzt mehr algebraische Kenntnisse voraus und man muß schon weiter eingedrungen sein, um ihre Vorzüge würdigen zu können. Erst dann erschließen sich die arithmetischen Strukturgesetze in einfacher und natürlicher Art. Die bewertungstheoretische Methode gestattet den aus der Funktionentheorie bekannten Zusammenhang zwischen dem Verhalten im Kleinen und im Großen ins Arithmetische zu übertragen. Klassenkörpertheorie und allgemeines Reziprozitätsgesetz treten nunmehr erst in ihrer wahren und tiefen Bedeutung hervor. Davon wird allerdings erst die Fortsetzung dieses Bandes berichten. Abschnitt I bringt die Grundlagen der Arithmetik im Körper P der rationalen Zahlen. Die Darstellung ist eigenartig, reizvoll, nicht ganz leicht, aber eine sehr gute Einführung, um das Folgende leichter zu verstehen. Es kommt wesentlich darauf an, Einsicht in die Struktur des Körpers P mit Hilfe seiner Additionsgruppe und seiner Multiplikationsgruppe zu gewinnen. Abschnitt II handelt ausführlich von der Theorie der bewerteten Körper. Damit erhält man wesentliche Hilfsmittel für die Beschreibung des Aufbaues von Körpern. Es ergibt sich eine neuartige Auffassung der Arithmetik, bei der Teilbarkeits- und Kongruenzbeziehungen als Annäherungsaussagen im Sinne der neuen Größenbegriffe erscheinen. Abschnitt III bringt die Grundlagen der Arithmetik in algebraischen Zahlkörpern K. Nun ergibt sich mit Hilfe der Bewertungstheorie eine Arithmetik in K, die die wesentlichen Züge der Arithmetik in P trägt und bei der sich die Arithmetik in P in naturgemäßer Weise einbettet. Nach Darlegung der Divisorentheorie folgen die schönen Sätze über Differente und Diskriminante, über Einheiten und Klassenzahl in neuartiger Begründung. Nun erkennt man so recht, daß die zunächst abstrakt erscheinende Theorie auch durchaus auf konkrete Fälle anwendbar ist. Dem Leser wird in Anhängen zu den einzelnen Paragraphen auch die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper vermittelt. Dies führt bis zum Riemann-Rochschen Satz. Das Buch nimmt eine Mittelstellung zwischen einem Lehrbuch und einem Handbuch ein. Daher ist die Darstellung nicht leicht. Zu Beginn jedes Paragraphen steht eine kurze Erläuterung, wodurch das Verständnis des Folgenden erleichtert wird. Der Autor ist neben H e n s e l der bedeutendste Vertreter der bewertungstheoretischen Methode in der algebraischen Zahlentheorie und daher so recht berufen, ein Buch darüber zu verfassen. Das Buch hat den unschätzbaren Wert, daß es nun dem Leser leichter gemacht wird, in die Originalliteratur einzudringen. Es wird auch gewiß dazu beitragen, der bewertungstheoretischen Methode viele Freunde zu bringen. Es wäre sehr wünschenswert, wenn die geplante Fortsetzung bald erscheinen würde.

N. Hofreiter, Wien

Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern. Von *H. Hasse.* (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.) 95 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1950. DM 14.—.

Es werden Methoden angegeben, um Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen, und biquadratischen Zahlkörpern K arithmetisch zu bestimmen. Nach einer arithmetischen Kennzeichnung der ganzen Zahlen von K wird die Existenz einer Grundeinheit E bewiesen, die im wesentlichen eindeutig bestimmt ist. Sie ist durch eine Minimaleigenschaft charakterisiert ähnlich wie die Grundeinheit im reellen quadratischen Zahlkörper kleinste Lösung der Pellschen Gleichung ist. Sodann wird gezeigt, wie man die Grundeinheit E numerisch bestimmt. Die Klassenzahl h von K ist die Höhe einer bestimmten Kreiseinheit über der Grundeinheit E, womit die Klassenzahlformel in arithmetische Gestalt gesetzt ist. Sodann wird ein Verfahren zur numerischen Berechnung entwickelt. Zuletzt werden Tafeln der Grundeinheiten, Kreiseinheiten und Klassenzahlen für die Körper K mit Führern bis 100 aufgestellt.

N. Hofreiter, Wien

Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Von *O. Toeplitz*. Aus dem Nachlaß herausgegeben von *G. Köthe*. Band I. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von W. Blaschke, R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band LVI.) IX, 180 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1949. DM 19.60, geb. DM 22.60.

Es gibt ein biogenetisches Grundgesetz, welches besagt, daß die Entwicklung des Einzelwesens, jene der Art wiederhole. In Analogie hiezu geht das Werk von dem Gedanken aus, dem Lernenden zu zeigen, wie unsere heutige Infinitesimalrechnung geworden ist, — ohne jedoch die zahlreichen Irr- und Seitenpfade zu betreten — um das Verständnis des Studierenden am historischen Werden der Begriffe zu schulen. Das Lesen des Buches bereitet wirklichen Genuß. Das Genie der großen griechischen Mathematiker wird in ein helles Licht gerückt, ihre Leistungen finden aber erst Anerkennung und Fortführung als das Abendland aus seiner Erstarrung erwacht. (Cavallierie, Fermat, Galilei usw.) Es gehört das didaktische und sachliche Geschick der Verff. dazu, niemals das Hauptziel hiebei aus den Augen zu verlieren: Der Leser soll nicht — oder nur nebenbei — Geschichte, sondern Mathematik lernen. Ein sehr hübsches Beispiel ist die Darlegung der Indivisibilien-Methode. Man erkennt einerseits, warum man auf ihr das bestimmte Integral nicht streng aufbauen kann und wirft anderseits bewundernd einen Blick auf die hohe Intuition der griechischen Mathematiker und der neuzeitlichen Fortsetzer. Die letzten Abschnitte, welche die Keplerschen Gesetze und die triumphalen Entdeckungen Newtons behandeln, lenken die Aufmerksamkeit auf die enge Verknüpfung zwischen Mathematik und Physik, welche damals wie heute Quelle bedeutenster Fortschritte in beiden Disziplinen ist. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß es kaum eine angenehmere Art geben kann, die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung zu lernen. (Begriff des Grenzwertes, die elementaren Funktionen, volle Beherrschung des Differenzierens, Riemannscher Integralbegriff für stückweise monotone Funktionen, die Technik des Integrierens). Sorgfältig ausgewählte Übungsaufgaben beschließen das Werk. Sie lassen sich auf Grund der erworbenen Kenntnisse vom Studierenden ohneweiteres bewältigen.

L. Schmetterer, Wien

Differential- und Integralrechnung. Von *W. Maak*. (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften.) 235 S. Wolfenbüttel: Wolfenbütteler Verlagsanstalt. 1949.

Die Bücher der Sammlung dienen dem Ziel, dem noch immer herrschenden Mangel an — zumindest erschwinglichen — guten Lehrbüchern abzuhelfen. Diese Absicht ist hier glänzend verwirklicht. Auf verhältnismäßig engem Raum findet der Studierende fast alles, zum Teil vielleicht noch mehr, was sonst in der Anfängervorlesung geboten wird. Ausgegangen wird gleich von den reellen Zahlen. Ist es doch sehr problematisch, ob der vielfach geübte Brauch von den natürlichen Zahlen oder gar von den logischen Grundlagen auszugehen, in der Anfängervorlesung am Platze ist. Die Hand des nach der geometrischen Seite hin orientierten Forschers ist vielfach zu spüren und vermag auch „alltägliche Gegenstände" reizvoll darzustellen. (Definition des Differentiales im Falle einer und mehrerer Veränderlicher, sowie deren Gebrauch, Erklärung der alternierenden Differentiale, die allgemeine Formel von Stokes u. a. m.) Spezielle Erwähnung verdient auch der schon im Vorwort hervorgehobene Beweis, daß jede unendliche Zahlenfolge eine monotone Teilfolge besitzt und ein selten gebrachter Beweis für den Satz vom Maximum (Minimum) für stetige Funktionen. Vielleicht kommen die mengentheoretischen Begriffe etwas zu kurz. Der Hauptsatz über implizite Funktionen hätte ebenfalls Erwähnung verdient. Druck und Papier lassen etwas zu wünschen übrig, doch erscheint mir die luxuriöse (daher kostspielige) Ausstattung mancher Neuerscheinungen augenblicklich eher ein Nachteil als ein Vorzug zu sein. Dem ernsthaft Studierenden wird man das Buch wärmstens empfehlen. Sauberkeit der Darstellung und leichte Verständlichkeit lassen das Buch hiezu besonders geeignet erscheinen.

L. Schmetterer, Wien

Fastperiodische Funktionen. Von *W. Maak*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von W. Blaschke, R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band LXI.) VIII, 240 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg. Springer-Verlag. 1950. DM 21.60, geb. DM 24.60.

Dieses neue Buch aus den „Grundlehren" ist die erste Darstellung der Theorie der fastperiodischen Funktionen (im folgenden abgekürzt fp. F.) auf Gruppen in deutscher Sprache. Diese Theorie, die dem Verfasser selbst wesentliche Beiträge verdankt, hat so viele Beziehungen zu den verschiedensten Teilen der Mathematik, daß eine Darstellung ihrer wichtigsten Ergebnisse wohl von jedem mathematisch interessierten Leser begrüßt werden wird. Um so mehr als dies von dem Verfasser in einer Form getan wird, die in keiner Beziehung etwas zu wünschen übrig läßt. Wir wollen auf den Inhalt kurz eingehen: Nachdem im ersten Kapitel einige Sätze über Darstellungen endlicher Gruppen bereitgestellt sind, bringt das zweite Kapitel — ein zentraler Teil des gesamten Buches — die vom Verf. gegebene Definition der fp. F. Hier wird nun der Begriff des „Moduls fp. F." eingeführt, das ist eine Menge fp. F. f(x), deren wesentliche Eigenschaft darin besteht, daß eine Ersetzung des Argumentes x durch x.a (a beliebiges Gruppenelement) die Funktionen des Moduls nur untereinander vertauscht. Nun wird der Beweis des Hauptsatzes erbracht, nach dem jeder Modul in einem gewissen Sinne Summe der in ihm enthaltenen irreduziblen Teilmoduln ist. Im dritten und vierten Kapitel werden die gewonnenen Resultate auf periodische Funktionen und auf die fp. F. im ursprünglichen Sinne von H. Bohr angewendet. Die Theorie der letzteren erfährt auch eine von Kap. II unabhängige Begründung mittels eines auch an sich interessanten Satzes von Bogoliouboff. Kap. V bringt die beschränkten Darstellungen und

Fourierreihen beliebiger Gruppen in großer Allgemeinheit und ein Analogon zur Fejerschen Summierung der gewöhnlichen Fourierreihen. Der nächste Abschnitt ist dem berühmten V. Hilbertschen Problem gewidmet, dessen Lösung für n-dimensionale kompakte Gruppen ausführlich dargestellt wird. Hier findet sich auch eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, soweit sie in dem Buch benötigt wird. Dieser Abschnitt schließt mit dem Beweis des Satzes von v. d. Waerden über die Stetigkeit der Darstellungen einer halbeinfachen Gruppe. Im letzten Kapitel werden noch als Anwendung vorangegangener Sätze die Darstellungen der dreidimensionalen Drehgruppe und die fp. F. auf der Kugel untersucht.

An Vorkenntnissen setzt die Darstellung ein Minimum voraus, so daß es von Studenten in mittleren Semestern sicherlich ohne allzu große Mühe gelesen werden kann. Beim Lesen des Buches wundert man sich, wie einfach oft auch kompliziertere Dinge durch die Darstellungskunst des Verf. werden. Jeder Gedankengang wird genau erläutert und es wird vor allem immer gesagt, wozu jeder Schritt gut ist, ohne daß der Leser dies erst durch längeres Rätselraten festzustellen braucht. Ein Anhang mit Literaturhinweisen und weiteren Ausblicken vermittelt ein lebendiges Bild von den vielen Forschungsrichtungen die mit der Theorie der fp. F. zusammenhängen und durch sie gefördert wurden. Auf alle Fälle kann der Verfasser sicher sein, daß er sein Ziel, die Begeisterung für dieses schöne Gebiet im Leser wachzurufen, in vollkommener Weise erreicht hat.

K. Prachar, Wien

Funktionentheorie. Von *C. Caratheodory*. Band I. 288 S. - Band II. 194 S. — Basel: E. Birkhäuser. 1950.

Als Abschluß des funktionentheoretischen Lebenswerkes des Verf. liegt nun, hauptsächlich aus äußeren Gründen, ein in zwei Bände geteiltes Lehrbuch vor, dessen Drucklegung noch unter den Augen des kürzlich Verstorbenen vollendet werden konnte.

Ein so durchaus origineller Geist wie Caratheodory wußte natürlich auch bei der Darstellung eines so oft behandelten Gebietes eigene Wege zu gehen und so weicht denn auch der Aufbau des Werkes stark vom üblichen ab, wie die folgende Inhaltsangabe zeigen wird.

Selbstredend beginnt das Werk mit den komplexen Zahlen, es wird aber in dem „der Gebrauch der komplexen Zahlen" überschriebenen ersten Teil gleich die sphärische und die hyperbolische Geometrie soweit dargestellt, als es für die Zwecke der Funktionentheorie erwünscht ist. Im zweiten Teil werden die mengentheoretischen und topologischen Hilfsmittel bereitgestellt, wobei große Abschnitte bloß referierenden Charakter haben. Mit dem dritten Teil setzt dann die eigentliche Funktionentheorie ein; zunächst werden Differentiation und Integration komplexer Funktionen definiert, hierauf die regulär-analytischen Funktionen nach der Cauchyschen Definition eingeführt und der Cauchysche Integralsatz nach dem klassischen Verfahren von Coursat bewiesen. Dann folgt aber gleich der Riemannsche Satz über hebbare Singularitäten, das Prinzip vom Maximum und das Lemma von Schwarz, das im folgenden ein Hauptbeweismittel bildet. Zunächst wird aus ihm die Isoliertheit und endliche Vielfachheit der Nullstellen einer nicht konstanten Funktion hergeleitet. Es folgt ein Abschnitt über harmonische Funktionen, dann werden die meromorphen Funktionen behandelt. Die Einführung der Pole ist durch das konsequente Arbeiten mit der sphärischen Metrik auf der Riemannschen Kugel fast eine Selbstverständlichkeit. Im vierten Teil wird die Erzeugung analytischer Funktionen der Grenzprozesse auf Grund der Begriffe „stetige Konvergenz"

und „Grenzschwankung" in Angriff genommen. Nach Einführung des allgemeinen Begriffes der „normalen Familie" erscheinen zum ersten Mal (auf S. 197!) die Potenzreihen. Weitere Gegenstände dieses Abschnitts sind die Partialbruchreihen, die Reihe von Lagrange und der Residuenkalkül. Der fünfte Teil - der letzte des ersten Bandes - bringt die elementaren Funktionen einschließlich der Gammafunktion. Hier sind besonders viele hübsche Einzelheiten anzutreffen, u. a. eine (von Herglotz stammende) sehr elegante Herleitung der Partialbruchzerlegung von ctg z.

Im zweiten Band bringt der sechste Teil des Gesamtwerkes die Theorie der beschränkten Funktionen, den Riemannschen Abbildungssatz, den Verzerrungssatz, einiges über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche, das Spiegelungsprinzip (unter bemerkenswert weiten Voraussetzungen) und einiges über die Randabbildung — wie man sieht, lauter Dinge, die in dem wissenschaftlichen Lebenswerk des Verf. wesentlich verankert sind. In dem siebenten Teil werden die Schwarzschen Dreiecksfunktionen ausführlich behandelt; um die nötigen Sätze über analytische Differentialgleichungen herleiten zu können, wird sogar die allgemeine Definition der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen herangezogen und zu diesem Zweck der Hartogssche Satz bewiesen. Im übrigen ist in diesem Abschnitt die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung in aller Ausführlichkeit dargestellt, die Ergebnisse werden in übersichtlicher Tabellenform zusammengefaßt. In dem Schlußkapitel dieses Teils und damit des Gesamtwerkes wird der Gedankenkreis von Picard-Schottky-Landau dargestellt, wobei dank der vorhergehenden Entwicklungen bei allen Abschätzungen die scharfen Schranken angegeben werden.

So liegt eine Darstellung der Funktionentheorie vor uns, die zwar wichtige Teile (ganze funktionenelliptische Funktionen, algebraische Funktionen) übergeht, aber dafür die behandelten Themen mit einer Gründlichkeit erledigt, die man in anderen Lehrbüchern kaum finden wird. Die Literatur für den fortgeschrittenen Studierenden ist um ein hervorragendes Lehrbuch bereichert.

J. Radon, Wien

Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für das Differenzenverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems, des gemischten Anfangs-Randwert- und des charakteristischen Problems einer hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Von *H. Beckert*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 97, Heft 4. 40 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1950.

Diese Untersuchung, welche durch E. Hölder veranlaßt wurde, behandelt die im Titel genannten Probleme nach der Methode von Lewy (Math. Ann. **98**, 179—191 (1928) in strenger und ausführlicher Weise, insbesondere wird die Konvergenz des Differenzenverfahrens in allen Einzelheiten bewiesen.

E. Hlawka, Wien

Höhere Mathematik. Von *R. Rothe*. Teil I: Achte Auflage. Mit 161 Textabb., 208 S. 1949. DM 6.20. — Teil II: Sechste Auflage. Mit 98 Textabb., 208 S. 1949. DM 6.20. — Teil III: Vierte Auflage. Mit 167 Textabb., 236 S. 1949. DM 7.—. — Teil IV. Übungsaufgaben mit Lösungen zu Teil I, II und III. Unter Mitwirkung von *O. Degosang*. Heft 1/2: Fünfte Auflage. Mit 97 Textabb., 109 S. 1949. DM 3.50. — Heft 3/4: Vierte Auflage. Mit 51 Textabb., 108 S. 1949. DM 3.50. — Heft 5/6: Dritte Auflage.

Mit 59 Textabb., 108 S. 1949. DM 3.50. – **Formelsammlung zur Höheren Mathematik.** Von *R. Rothe* unter Mitwirkung von *O. Degosang* und *G. Dobbrack*. Zweite Auflage. Mit 74 Textabb., 124 S. 1950. DM 4. –. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch.

Teil I enthält die Grundbegriffe der Analysis (Zahlen, Funktion, Grenzwert), die Hauptsätze der Differentialrechnung, die Grundformeln der Integralrechnung, ferner Funktionen von mehreren Veränderlichen, Differentialgeometrie ebener Kurven und Elemente der Funktionentheorie insb. konforme Abbildung.

Teil II bringt den weiteren Ausbau der Integralrechnung, ferner unendliche Reihen, insb. Potenzreihen, sodann Integrale, die von einem Parameter abhängen, Kurvenintegrale im Reellen und im Komplexen, Determinanten und Vektoren mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

Teil III enthält die Theorie der krummen Flächen, Kurvenintegrale im Raum, mehrfache Integrale, einen großen Abschnitt über gewöhnliche Differentialgleichungen und einen Paragraphen über partielle Differentialgleichungen.

Die drei Doppelhefte des IV. Teiles enthalten eine sehr große Anzahl von Übungsaufgaben zum Studium des in I—III behandelten Stoffes. Zu fast allen Aufgaben ist eine Anleitung und das Ergebnis angegeben. Die Aufgaben sind der Mathematik, der Physik und den Ingenieurwissenschaften entnommen.

In der Formelsammlung werden die in I—III bewiesenen Lehrsätze und Formeln systematisch ohne Beweise zusammengestellt.

Es ist sehr erfreulich, daß die außerordentlich beliebten Bücher von R. Rothe wieder erschienen sind und zu relativ billigen Preisen erworben werden können. Die neuen Auflagen unterscheiden sich nur ganz unwesentlich von den letzten Auflagen. Die Bücher zeichnen sich dadurch aus, daß mathematische Strenge in der Begriffsbildung und Beweisführung mit den Bedürfnissen der angewandten Mathematiker in idealer Weise vereinigt ist. Die Darstellung ist prägnant und knapp. Die Bücher sollen neben den Vorlesungen benützt werden und sind den Studierenden der Mathematik, der Physik und der Technik aufs wärmste zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die analytische Geometrie. Von *L. Bieberbach*. Vierte Auflage. 168 S. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch. 1950. DM 8.90.

Genau so wie in den früheren Auflagen wird die analytische Geometrie in abstrakter Form aufgebaut, wobei aber stets der Zusammenhang mit der Anschauung gewahrt bleibt. Auch jetzt tritt das Methodische in den Vordergrund im Vergleich zum Stofflichen. Begriffliches Denken überwiegt, Rechnen tritt zurück. Nach Bieberbach ist es nicht der Sinn der analytischen Geometrie zu rechnen, sondern die geometrische Betrachtung mit Formeln zu begleiten, man kann sagen, in den Formeln zu lesen. Das Inhaltsverzeichnis ist fast dasselbe wie früher, nur ein Paragraph über „Einiges aus der Geometrie der Kreise" ist dazugekommen. Aber beim Lesen der einzelnen Paragraphen merkt man, daß die vierte Auflage neu bearbeitet wurde. Nur wenig wurde unverändert übernommen. Die Darstellung ist etwas leichter verständlich geworden, aber noch immer knapp und verlangt vom Leser gründliches Denken. H. Hahn hat eine frühere Auflage des Buches in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **40**, 9 (1933)) sehr lobend besprochen. Was er damals sagte, gilt unverändert auch für die neue Auflage.

N. Hofreiter, Wien

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Von *K. Kommerell*. Zweite Auflage. Mit 77 Textabb., 2 Tafeln, VIII, 407 S. Stuttgart: K. F. Köhler. 1950.

Das beliebte Buch, welches 1941 erschien, liegt nun in zweiter, wenig veränderter Auflage vor. Daß eine neue Auflage bereits notwendig ist, zeigt, daß dieses Buch einem dringenden Bedürfnis, besonders unter den Studierenden der Mathematik und der Naturwissenschaften entspricht. Es wird hier wirklich Geometrie betrieben. Mit großer Liebe vertieft sich der Verf. in geometrische Einzelfragen, es sei nur die Fresnelsche Wellenfläche hervorgehoben. Die Darstellung ist mit großem didaktischen Geschick ausgearbeitet, so daß für unsere Studierenden wirklich ein Königsweg vorliegt. Aber auch der echte Geometer wird aus diesem Buch vielen Gewinn ziehen können. Der Erfolg wird dem Buch auch in der zweiten Auflage sicher sein.

E. Hlawka, Wien

Wo steckt der Fehler? Von *W. Lietzmann*. Mit 120 Textabb., 183 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950. $ 1.30.

Viele Mathematiker erinnern sich des netten Büchleins aus der Mathematisch-Physikalischen Bibliothek, das den Titel hatte: Wo steckt der Fehler? Seit langem ist eine Neuauflage notwendig geworden. Aber der Stoff, den Lietzmann gesammelt hatte, wurde viel umfangreicher, und so ist ein fast 200 Seiten starkes Buch entstanden. Es enthält A) zahlreiche Beispiele über Täuschungen bei Schätzungen, über Täuschungen der Anschauung, viele Beispiele von Fehlern in Büchern und Zeitungen, eine besonders große Liste von Fehlern bei Schülern, dann B) Trugschlüsse aus den verschiedenen Zweigen der Elementarmathematik und zuletzt C) Warnzeichen aus der Differential- und Integralrechnung. Das sind Beispiele, die vor irrigen, naheliegenden Schlüssen warnen sollen. In den „Feststellungen" in C) wird der richtige Sachverhalt dargestellt. Bei den Fehlern und Trugschlüssen in A) und B) soll der Leser selbst draufkommen. Das Buch ist sehr anregend geschrieben, aber keineswegs reine Unterhaltung. Es steckt viel Ernst darin und für den Lehrer viel Wertvolles für seinen Unterricht.

N. Hofreiter, Wien

Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Von *E. Madelung*. Vierte Auflage. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von W. Blaschke, R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band IV.) Mit 29 Textabb., XVII, 531 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 47.—, geb. DM 49.70.

Der Umfang des Buches, welches bereits zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für den Physiker geworden ist, hat sich in der vorliegenden vierten Auflage wieder bedeutend vergrößert, um den Anforderungen der modernen Physik gerecht zu werden. Die Anzahl der Seiten des Werkes hat sich gegenüber der vorhergehenden Auflage (vgl. Mh. Math. Phys. 44, 6 (1936)) um fast 150 Seiten vergrößert. Neu hinzugekommen ist ein Abschnitt über Zahlen, Funktionen und Operatoren. Gerade hier hätte der Mathematiker manches zu beanständen. Wenn ich auch mit den Ausführungen des Verf. in der Einleitung vollkommen übereinstimme, so halte ich es doch für besser, Dinge wegzulassen, die für dieses Werk nicht wesentlich sind und dem Mathematiker ein Ärgernis bedeuten, wie z. B. der Paragraph über Grenzwerte. In diesem ersten Abschnitt werden, infolge ihrer Bedeutung für die Quantentheorie, auch die hyperkomplexen

Zahlen, insbesondere die Cliffordschen Zahlen, behandelt. Im vierten Abschnitt ist die Sattelpunktsmethode hinzugekommen. Die hypergeometrischen Funktionen, vor allem die konfluenten Funktionen werden in den Vordergrund gestellt und die Mathieuschen bzw. Hillschen Funktionen neu aufgenommen. Im sechsten Abschnitt werden die Drehungen ausführlicher behandelt, im Hinblick auf die Kristallographie. Das siebente Kapitel bringt jetzt das Punktgitter, ausführlich die Wellenfelder und ihre Fourierdarstellung, hyperkomplexe und duale Vektoren. Der Abschnitt über Gruppentheorie wurde durch die Aufnahme der Symmetriegruppen und Kristallklassen vermehrt. In dem meisterhaften Abschnitt über Differentialgleichungen wurde die Liste der Parikulärlösungen vergrößert (es sei die elegante Herleitung des Potentials des Ellipsoids hervorgehoben). Die Störungstheorie wird ausführlicher dargestellt und bringt jetzt auch die höheren Näherungen. Im letzten Abschnitt des mathematischen Teiles erscheint jetzt auch die Ausgleichsrechnung. Im physikalischen Teil wurde der Mechanik der Massenpunktladungen ein weiter Platz eingeräumt, während die allgemeine Relativitätstheorie gekürzt wurde. Die Quantentheorie geht jetzt bis zur zweiten Quantelung und in der Thermodynamik wurde die Relativitätstheorie berücksichtigt. Im Anhang ist das Beispiel zur Gruppentheorie und zur Eigenwertaufspaltung besonders begrüßenswert. Die praktische Anwendung der Darstellungstheorie macht dem Physiker oft große Schwierigkeiten. Dieses Buch, das viele wertvolle Einzelheiten enthält, die vom Verf. stammen, wird auch in der neuen Auflage jedem Physiker und auch Mathematiker von unschätzbarem Nutzen in seiner Arbeit sein.

E. Hlawka, Wien

Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. Von *F. Oberhettinger* und *W. Magnus*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von W. Blaschke, R. Grammel, E. Hopf, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LV.) Mit 54 Textabb., VII, 126 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1949.

Die Aufgaben, deren Lösung auf elliptische Funktionen führt, lassen sich in ein- und zweidimensionale einteilen. Bei den ersteren werden nur die Werte der Funktionen für eine reelle Variable benützt, während bei den anderen die Variable im komplexen Gebiet beweglich ist. Während eindimensionale Aufgaben in den Lehrbüchern vielfach behandelt werden, sind die zweidimensionalen — von den Problemen der konformen Abbildung abgesehen — nur selten anzutreffen. Und doch bieten sich gerade hier eine große Menge reizvoller Anwendungen in Physik und Technik.

Es ist daher sehr zu begrüßen, daß die beiden bekannten Verfasser in ihrem neuen Werk den Nachdruck auf die zweidimensionalen Probleme gelegt haben. Nach einem einleitenden Kapitel, das eine sehr brauchbare Formelsammlung über elliptische Funktionen darstellt, werden in den drei folgenden Kapiteln Probleme der konformen Abbildung, der Elektrostatik und der Strömungslehre behandelt. Das letzte Kapitel bringt dann eindimensionale Probleme: Pendel, Knickung eines Stabes und eine sehr interessante Aufgabe über Tschebyscheff-Approximation das aus der Wechselstromtechnik stammt und mit elliptischen Funktionen gelöst wird. Eine kleine Zusammenstellung von Tafeln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung beschließt das Buch, das sowohl als Ergänzung zu theoretischen Vorlesungen wie auch als Hilfsmittel bei der Lösung praktischer Probleme willkommen sein wird.

J. Radon, Wien

Chance and Choice by Cardpack and Chessboard. An Introduction to Probability in Pratice by Visual Aids. Band I. Von *L. Hogben*. Mit 84 Textabb., 417 S. London: M. Parrish & Co. Limited. 1950. Geb. 50 s. net.

Die Statistik ist heute ein unentbehrliches Hilfsmittel für die verschiedensten Wissenszweige geworden. Man kann nicht jedem, der sich dieses Werkzeuges bedienen will, zumuten, sich in die oft nicht ganz einfachen mathematischen Theorien einzuarbeiten, anderseits schützt nur ein gediegenes Verständnis der statistischen Methoden vor Fehlanwendungen. Diesen Umständen trägt Verf. Rechnung und entwickelt „vor den Augen" des Lesers das notwendige Rüstzeug für den Statistiker, dem es hauptsächlich um die Anwendung zu tun ist. Der Verf. hat sich zu seinem didaktischen Grundsatz gemacht: „Lerne durch Schauen" und so begleiten den Text zahlreiche oft bunte Figuren, welche auch Sachverhalte, deren saubere Begründung oft verhältnismäßig mühsam ist, anschaulich näherbringen und erfaßbar machen sollen. Zahlreiche Beispiele unterstützen die diesbezüglichen Bestrebungen des Autors und es ist wohl nicht zu bezweifeln, daß Leser, die dem visuellen Typ angehören, gerne zu diesem Buch greifen werden. Dazu beginnt dieses ganz elementar (Lehre von den Kombinationen), bedient sich dann eines „geläuterten" Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriffes, führt schließlich über das Bayessche Theorem zum Begriff der Vertrauensgrenzen, widmet ein ganzes Kapital der Momentenmethode und endet mit einem Blick auf die Varianzanalyse. Insgesamt wird das Buch seinem Zweck wohl vollkommen gerecht. Einige wie mir scheint nicht sehr gebräuchliche Symbole (z. B. ÷ als Divisionszeichen u. a.) erschweren etwas das Zurechtfinden.

L. Schmetterer, Wien

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von *K. Federhofer*. Mit 35 Textabb. und 26 Zahlentafeln, XII, 179 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 84.–, sfr. 23.50, $ 5.50, DM 23.—.

Das Buch behandelt zum ersten Mal ausführlicher die Dynamik der gekrümmten Stäbe, über die bisher in den einschlägigen Werken nur wenig zu finden war. Obwohl also bisher nur wenig in Lehrbüchern behandelt ist, ist die Theorie der Schwingungen solcher Systeme von großer Bedeutung auch für die Praxis (Schwingungen von Bogenbrücken, Maschinenteilen, Leitungsrohren usw.). Im ersten Abschnitt findet sich eine sehr klare Darstellung der Kinematik des gekrümmten Stabes. Die Beziehungen werden sogar allgemeiner für Stäbe mit außerdem tordierter Zentrallinie hergeleitet. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen der Eigenschwingungen des räumlich schwingenden offenen Kreisbogens beliebigen Querschnittes. Sie ergeben sich samt den zugehörigen Randbedingungen durch die „Energiemethode" d. h. aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip. In den nun folgenden Kapiteln wird die Theorie auf eine Fülle von wichtigen Spezialfällen angewendet, von denen wir nur einige erwähnen: Einfach — und doppelt-symmetrische Querschnitte werden untersucht. Besonders für die letzteren werden die Schwingungsgleichungen ausführlich diskutiert und die Eigenfrequenzen für die verschiedenen Schwingungsformen berechnet. Großes Interesse beanspruchen die Schwingungen eines geschlossenen freien Kreisringes, da hier die Ergebnisse der Theorie mit von W. Kuhl durchgeführten Schwingungsversuchen an Stahlringen verglichen werden können. Weiters werden Kreisbogenträger mit längs der Bogenachse veränderlichem Querschnitt behandelt, die für die Praxis ebenfalls von großer Bedeutung sind. Als letztes sei noch ein Abschnitt erwähnt, der sich mit dem Einfluß eines radialen Außen- oder Innendruckes auf die Schwingungen des Trägers beschäftigt.

Als ein wesentlicher Vorzug des Buches ist es anzusehen, daß sich der Verfasser überall bemüht hat, die zahlenmäßige Auswertung der gewonnenen Resultate durch Tafeln und graphische Darstellungen möglichst zu erleichtern, wofür der Praktiker sicherlich sehr dankbar sein wird. Aber auch der Nichtfachmann wird dem Verfasser dafür dankbar sein, daß er durch seine Arbeit ein schönes Gebiet der technischen Schwingungslehre einem weiteren Leserkreis erschlossen hat.

K. Prachar, Wien

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von *K. Federhofer*. In drei Teilen. I. Teil: Statik. 165 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 243 Textabb., V, 130 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 34.—, sfr. 10.—, $ 2.30, DM 9.60.

Um Mechanik wirklich zu verstehen, ist es notwendig, zahlreiche Aufgaben zu rechnen. Es ist erfreulich, daß hier eine ausgezeichnete Aufgabensammlung vorliegt, die eine Fülle von leichten und schwierigeren Aufgaben aus der analytischen und graphischen Statik enthält. Neben den Aufgaben werden stets die Lösungen angegeben. Die leicht verständlichen Erläuterungen bieten dem Studenten wertvolle Hilfe. Zu begrüßen sind auch die knapp gehaltenen Regeln und Lösungsmethoden. Die Ausstattung ist besonders gut.

N. Hofreiter, Wien

Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Von *C. Müller*. (Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Jahrgang 1945/46, Nr. 3.) 56 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1950.

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Lösungen der Maxwellschen Gleichungen unter der Voraussetzung, daß alle darin vorkommenden Größen einen Zeitanteil der Form $\exp(-i\omega t)$ haben. Im $(\omega) \gtrless 0$. Durch Einführung eines fiktiven magnetischen Stromes und einer fiktiven magnetischen Ladung gewinnen diese Gleichungen eine symmetrische Gestalt (die im wesentlichen wohl von Kottler stammt). In Teil 1 wird das Feld berechnet, wenn die Ströme in einem endlichen Gebiet vorgegeben sind, und zwar für homogene Medien. In Teil 2 wird in dieses Feld ein Körper gebracht, dessen Inneres nicht mehr homogen ist. Die Existenz der entsprechenden Lösungen der Maxwellschen Gl. wird auf das Existenzproblem für ein System von zwei Integralgleichungen zurückgeführt. (Bei ebenen Problemen ähnlich von Sternberg, Kupradze u. a. verwendet.) Für den Spezialfall am Rande des Körpers stetiger ε, μ kann so die Existenz von Lösungen gezeigt werden. Die Eindeutigkeit wird erreicht durch eine vom Verfasser aufgestellte „Ausstrahlungsbedingung" (analog der Sommerfeldschen für die Wellengleichung) und einen Satz von F. Rellich. Hilfsmittel bei allen Überlegungen ist ein Huygenssches Prinzip für die Maxwellschen Gl. (MacDonald, Kottler, Stratton und Chu).

Es muß hervorgehoben werden, daß der Verfasser alle Voraussetzungen über die zugelassenen Funktionen und Gebiete immer genau präzisiert. Jedenfalls wird durch die vorliegende Arbeit, die sehr klar und verständlich abgefaßt ist, ein wesentlicher Beitrag zum Integrationsproblem für die Maxwellschen Gl. geliefert. Dies ist um so begrüßenswerter, als in vielen Lehrbüchern der theoretischen Physik diese Dinge nur unvollständig erwähnt werden.

K. Prachar, Wien

Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Von *R. Grammel.* Zweite, neubearbeitete Auflage. Erster Band: Die Theorie des Kreisels. Mit 137 Textabb., XI, 281 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 30.—, geb. DM 33.—.

Das bekannte Buch des Verf., welches 1920 erschien und die Theorie, wie die Anwendungen des Kreisels brachte, und seit längerer Zeit vergriffen war, erscheint nun in neuer Auflage zweibändig in bedeutend vergrößertem Umfang. Der erste Band, welcher hier vorliegt, bringt die Theorie, während der zweite den Anwendungen gewidmet sein wird. Der erste Band gliedert sich jetzt in vier Abschnitte und einen Anhang. Der erste Abschnitt, welcher der Einleitung der ersten Auflage entspricht, ist zu einer Einführung in die Mechanik ausgestaltet worden. Im zweiten Abschnitt, welcher den symmetrischen Kreisel behandelt, ist jetzt der Einfluß der Reibung ausführlicher dargestellt und die Bewegung des Kreisel in rotationssymmetrischen Kraftfeldern hinzugekommen. Beim unsymmetrischen Kreisel (3. Abschnitt) ist jetzt die MacCullaghbewegung besprochen. Der Verf. hat sich nun auch entschlossen, seine Untersuchungen über die Stabilität der Staudeschen Bewegungen im Buch aufzunehmen. Ein besonders reizvoller Abschnitt ist der vierte (Besondere Probleme), welcher den Spielkreisel, den Gyrostaten, das rollende Rad und die rollende Kugel, die gyroskopischen Systeme (Gelenkketten) und die gyroskopische Stabilisierung bringt. Dabei werden die Lagrangeschen Gleichungen (zweiter Art) hergeleitet und die für die Anwendungen sehr wichtigen Hermite-Hurwitzschen Stabilitätsbedingungen besprochen. Im Anhang wurde die analytische Darstellung der Bewegung des (kräftefreien unsymmetrischen, bzw. schweren, symmetrischen) Kreisels durch Thetafunktionen aufgenommen. Hiebei findet ein schönes Näherungsverfahren des Verf. Verwendung. Die jetzige Auflage zeigt, wie schon die erste, das hervorragende Geschick des Verf., verwickelte Dinge in einfacher Weise darzustellen.

E. Hlawka, Wien

The Mathematical Theory of Huygens' Principle. Von *B. B. Baker* and *E. T. Copson.* Zweite Auflage. Mit 26 Textabb., VII, 192 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1950. Geb. 21 s. net.

Das vorliegende Buch gibt die mathematische Theorie des Huygensschen Prinzips in Akustik und Optik und seine Anwendung auf die Theorie der Beugung. Von der Behandlung spezieller Probleme wird im allgemeinen abgesehen. Das Werk ist besonders für den angewandten Mathematiker, theoretischen und technischen Physiker hervorragend geeignet. Das Huygenssche Prinzip wird in dem Buch aus der Poissonschen Lösung der Wellengleichung hergeleitet. Dieser folgt die Formel von Helmholtz, aus der die Kirchhoffsche Formel hergeleitet wird, für welche auch eine direkte Begründung gegeben wird. Es sei hervorgehoben, daß die physikalische Bedeutung der Formeln stets diskutiert wird und auf die Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingungen nach Sommerfeld hingewiesen wird. Die historische Seite der Theorie (Fresnel) wird nicht vernachlässigt und auch die approximative Beugungsformel von Stokes hergeleitet. Für die Wellenbewegung in zwei Dimensionen werden die analogen Formeln (von Weber und Volterra) ebenfalls besprochen. Besonders reizvoll ist die Darstellung der eleganten Theorie von Marcel Riesz. Das Kapitel, welches der Beugungstheorie gewidmet ist, enthält eine ausführliche Kritik der Kirchhoffschen Theorie, diskutiert die Beugung an einer schwarzen Halbebene und die dabei auftretenden Integrale. Sehr klar ist die Darlegung der Kottlerschen

Theorie, welche ja die Kirchhoffsche Lösung als Sprungwert- und nicht als Randwertproblem auffaßt. Anschließend erfolgt die Übertragung der Kirchhoffschen Theorie auf elektromagnetische Wellen. (Formel von Larmor und Tedone) und die Kottlersche Theorie der Beugung im schwarzen Schirm. Es folgt dann eine gute Einführung in die Sommerfeldsche Theorie der Beugung. Den Abschluß des Buches bildet das Kapitel, welches die Beugungsprobleme mittels Integralgleichungen behandelt. Gerade diese Methode hat in den letzten Jahren besonderes Interesse gefunden. Ich nenne nur die Namen Fox, Magnus, Schwinger, Copson. Sie gestattet auch das Babinetsche Prinzip exakt zu formulieren und zu beweisen. Auf dieser Methode bauen sich auch die Approximationsmethoden von Raileigh und Levine und Schwinger auf, deren Aufnahme in diesem Buch besonders dankenswert ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß hier ein Buch vorliegt, welches sowohl für den Studierenden wie auch für den, der auf diesem Gebiete arbeitet, von großem Nutzen ist. Die Darstellung weist die Klarheit auf, wie man sie in englischen Werken gewohnt ist.

E. Hlawka, Wien

Arithmetik und Algebra. Teil 1. Dreizehnte Auflage. 124 S. $ 0,63. — Teil 2. Zehnte Auflage. 127 S. $ 0,72. — (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe II, Nr. 8 und 9.) — **Planimetrie.** Sechste Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe II, Nr. 12.) 132 S. $ 0,88. — **Ebene Trigonometrie.** Siebente Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe II, Nr. 5.) 104 S. $ 0,72. — **Analytische Geometrie der Ebene.** Siebente Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe II, Nr. 6.) 107 S. — Von *Crantz-Hauptmann*. Leipzig: B. G. Teubner. 1950.

Die hohe Auflagenzahl der Bücher zeigt die große Beliebtheit. Es ist daher sehr erfreulich, daß diese Bücher wieder gedruckt wurden und damit wieder käuflich erworben werden können. Dank der klaren, einfachen Darstellung eignen sie sich sehr gut für den Selbstunterricht. Die algebraischen Bücher gehen von den natürlichen Zahlen aus und erweitern den Zahlbereich bis zur Menge der komplexen Zahlen. Sie behandeln algebraische Gleichungen und Funktionen 1., 2. und 3. Grades, bringen arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung und den binomischen Lehrsatz. Die geometrischen Bücher bringen Planimetrie, ebene Trigonometrie und analytische Geometrie der Ebene. Letztere enthält sehr ausführlich die Eigenschaften der Kegelschnitte. Sämtliche Bücher enthalten sehr viele Aufgaben, die auch den Anwendungen entnommen sind.

N. Hofreiter, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkarbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. **Adalbert Duschek**

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

In vier Bänden

Soeben erschien:

Band II. Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder. Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. Lex.-8°. 1950.

S 87.—, DM 26.—, $ 7.80, sfr. 33.90. Geb. S 96.—. DM 29.—, $ 8.70, sfr. 37.80

Der zweite Band bringt alles zum Abschluß, was im ersten begonnen wurde, nämlich die Differential- und Integralrechnung sowie die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Darüber hinaus enthält er als Ergänzung, als Anwendung oder als Vorbereitung für die folgenden Bände je einen Abschnitt über Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung, über lineare Algebra (Determinanten, lineare Gleichungen und die wichtigsten Sätze der Tensorrechnung) und über die Grundbegriffe der Theorie der Tensorfelder. **In diesem Sinn stellen die beiden Bände ein für sich abgeschlossenes Werk dar.**

Früher erschien:

Band I. Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. Lex.-8°. 1949.

S 78.—, DM 26.—, $ 7.80, sfr. 33.90. Geb. S 87.—, DM 29.—, $ 8.70, sfr. 37.80

In Vorbereitung:

Band III. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Grundzüge der Funktionentheorie.

Band IV. Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplacetransformation.

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

Herausgegeben von **K. W. Fritz Kohlrausch,** Graz, und **Hans Thirring,** Wien

Schriftleitung: **Paul Urban,** Graz

Soeben erschien:

4. Band, 2. — 3. Heft. Festheft Hans Benndorf

(Ausgegeben im Dezember 1950)

Mit 56 Abbildungen. 172 Seiten. S 72.—, DM 21,—, $ 5.—, sfr. 21.70

Inhalt: **Székely, A.** *Benndorf* achtzig Jahre alt. — **Heinrich, G.** und **A. Klemenc.** Zur Behandlung der Diffusionsvorgänge in der Atmosphäre. — **Fiebich, M.** Beitrag zur Bestimmung der Elektronendichte in einer Gasentladung bei niederem Druck. — **Ledinegg, E.** und **P. Urban.** Über einige Ergebnisse aus der Theorie gekoppelter elektromagnetischer Hohlräume. — **Ledinegg, E.** und **P. Urban.** Über die Verlustwinkelbestimmung von Materialien mit hoher Dielektrizitätskonstante. — **Jäger, L.** Ein lichtelektrisch gesteuerter Fallbügelschreiber. — **Tomiser, J.** Optische Untersuchungen von Blutlösungen. — **Oswatitsch, K.** Die Geschwindigkeitsverteilung an symmetrischen Profilen beim Auftreten lokaler Überschallgebiete. — **Blaha, F.** Über Seignettesalzpräparate, die unter hohem Druck aus Kristallplatten gepreßt wurden. — **Biegelmeier, G.** Ein Beitrag zur klassischen Diffusionstheorie. — **Rieder, W.** Der *Szilard-Chalmers*-Effekt mit langsamen und schnellen Neutronen. — **Funk, P.** Über das Newtonsche Abbildungsgesetz in der Elektronenoptik. — **Koch, K. M.** Bemerkungen zur „Keim"-Theorie der Supraleitung. — **Smekal, A.** Über die Spaltbarkeit von Kristallen. — **Stetter, G.** und **H. Thirring.** *Hertha Wambacher* †.